

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION À UNE VARIABLE

Sommaire

1-	Résolution d'équations linéaires à une variable	4
1.1.	Méthode de résolution.....	4
2-	Exercices - Solutions et résolution d'équations linéaires.....	7

Une équation est une forme propositionnelle dans laquelle intervient une égalité entre deux expressions mathématiques qui est, soit vraie, soit fausse.

Exemple

- a. $2 = 5 - 3$
- b. $2x + 4y = 3x - 22z + 4$
- c. $3x^2 + 2x - 4 = 0$

Les trois exemples ci-dessus représentent des équations qui proposent l'égalité entre deux expressions. Cette égalité pourrait ou non être respectée. Dans l'exemple (a), il est facile de constater que l'égalité est vérifiée. Dans les exemples (b) et (c), la valeur que prennent les variables déterminera si, oui ou non, l'égalité est vérifiée. Ces valeurs qui rendent vraie une équation (et surtout les méthodes qui permettent de les trouver) ont une importance capitale en mathématiques. Ils font l'objet de la section suivante...

Solution d'une équation

La solution d'une équation est la valeur - ou les valeurs - que peut prendre une variable et qui réussit à rendre cette équation vraie.

Exemple

Soit l'équation $4x - 8 = 4$

La valeur $x = 3$ est une solution de cette équation. En effet, lorsque x est substitué par la valeur 3, l'équation est satisfaite.

$$4(3) - 8 = 4$$

$$12 - 8 = 4$$

$$4 = 4 \text{ (vrai!)}$$

Toutefois remplacer x par la valeur 4 ne réussirait pas à rendre vraie cette équation :

$$4(4) - 8 = 4$$

$$16 - 8 = 4$$

$$8 = 4 \text{ (faux!)}$$

Il est possible pour qu'une équation possède plus d'une solution. Ceci se produit, entre autres, lorsque le degré des polynômes utilisés n'est pas 1.

Exemple

Soit l'équation $x^2 + 6x = 16$.

Les solutions de cette équation sont $x = -8$ et $x = 2$ puisque :

$$\text{Si } x = -8 \rightarrow (-8)^2 + 6(-8) = 16$$

- $64 + (-48) = 16$
- $64 - 48 = 16$
- $16 = 16$ (vrai)

$$\text{Si } x = 2 \rightarrow (2)^2 + 6(2) = 16$$

- $4 + 12 = 16$
- $16 = 16$ (vrai)

Si une équation contient plus d'une variable, alors l'ensemble des valeurs que chacune des variables doivent prendre pour rendre vraie l'équation constituent une solution.

Exemple

Considérons l'équation à deux variables $2x + 3y = 8$

$x = 1, y = 2$ est une solution de l'équation $2x + 3y = 8$.

En effet, lorsque les variables x et y sont substituées par 1 et 2 respectivement, l'équation est satisfaite :

$$2(1) + 3(2) = 8$$

$$2 + 6 = 8$$

$$8 = 8 \text{ (vrai)}$$

$x = 4, y = 0$ est également une solution de l'équation $2x + 3y = 8$.

En effet, lorsque les variables x et y sont substituées par 0 et 4 respectivement, l'équation est bel et bien satisfaite :

$$2(4) + 3(0) = 8$$

$$8 + 0 = 8$$

$$8 = 8 \text{ (vrai)}$$

Il serait toutefois faux de dire que $x = 1, y = 1$ est une solution.

$$2(1) + 3(1) = 8$$

$$2 + 3 = 8$$

$$5 = 8 \text{ (faux)}$$

1- Résolution d'équations linéaires à une variable

Trouver les valeurs qu'une variable puisse prendre pour satisfaire à une équation donnée est un procédé délicat. Les opérations utilisées pour résoudre une équation et le choix de l'ordre dans lequel nous les exécutons demande de l'expérience et de la pratique. La section qui suit vous procurera une méthode permettant de résoudre les équations linéaires (c'est-à-dire dont le degré est 1) comprenant une variable.

Une équation, qui exprime l'égalité entre deux expressions, est comparable à une balance en équilibre. Pour maintenir l'égalité, il faut s'assurer d'effectuer les mêmes opérations de part et d'autre de l'égalité en tout temps. Entre autres, nous pouvons :

- Ajouter ou soustraire la même valeur **des deux côtés de l'égalité** ;
- Multiplier ou diviser **les deux côtés de l'équation** par la même valeur.

1.1. Méthode de résolution

Dans le cas d'équations linéaires à une variable, l'ordre dans lequel nous choisirons d'effectuer les opérations sera sensiblement le même quel que soit le problème donné.

1. Effectuer toutes les distributions ;
2. Regrouper les variables d'un côté de l'égalité et les nombres de l'autre ;
3. Diviser les deux côtés de l'égalité par le coefficient de la variable.

Afin d'alléger la notation, il est utile d'effectuer toutes les simplifications possibles en cours de route.

Exemple

Résoudre l'équation $4(x - 5) + 2x = 3x + 7$.

- **Effectuer toutes les distributions ;**

$$4x - 20 + 2x = 3x + 7 \text{ (distribution)}$$

$$6x - 20 = 3x + 7 \text{ (simplification)}$$

- **Regrouper les variables d'un côté de l'égalité et les nombres de l'autre ;**

Cette opération doit se faire en respectant l'équilibre entre les expressions de gauche et de droite. Afin de regrouper les variables à la gauche, il faut éliminer le terme $3x$ du terme de droite.

$6x - 20 - 3x = 3x + 7 - 3x$ (soustraction de la même valeur des deux côtés de l'égalité)

$$3x - 20 = 7 \text{ (simplification)}$$

Afin de regrouper les nombres du côté droit, il faut éliminer le terme -20 se trouvant à la gauche.

$$3x - 20 + 20 = 7 + 20 \text{ (addition de la même valeur des deux côtés de l'égalité)}$$

$$3x = 27 \text{ (simplification)}$$

- **Diviser les deux côtés de l'égalité par le coefficient de la variable.**

$$\frac{3x}{3} = \frac{27}{3} \text{ (division des deux côtés de l'équation par la même valeur)}$$

$$x = 9 \text{ (simplification)}$$

La solution est donc $x = 9$. Pour valider ce résultat, il importe de substituer la valeur obtenue dans l'équation originale :

$$4(x - 5) + 2x = 3x + 7$$

$$4(9 - 5) + 2(9) = 3(9) + 7$$

$$4(4) + 18 = 27 + 7$$

$$16 + 18 = 34$$

$$34 = 34 \text{ (vrai)}$$

Exemple

Résoudre l'équation $6(2x + 3) + x - 7 = 3(5x + 7) + 2x$.

- **Effectuer toutes les distributions ;**

$$12x + 18 + x - 7 = 15x + 21 + 2x \text{ (distribution)}$$

$$13x + 11 = 17x + 21 \text{ (simplification)}$$

- **Regrouper les variables d'un côté de l'égalité et les nombres de l'autre ;**

Cette opération doit se faire en respectant l'équilibre entre les expressions de gauche et de droite. Afin de regrouper les variables à la gauche, il faut éliminer le terme $17x$ du terme de droite.

$$13x + 11 - 17x = 17x + 21 - 17x \text{ (soustraction des deux côtés de l'égalité)}$$

$$-4x + 11 = 21 \text{ (simplification)}$$

Afin de regrouper les nombres du côté droit, il faut éliminer le terme $+ 11$ se trouvant à la gauche.

$$-4x + 11 - 11 = 21 - 11 \text{ (addition de la même valeur des deux côtés de l'égalité)}$$

$$-4x = 10 \text{ (simplification)}$$

- **Diviser les deux côtés de l'égalité par le coefficient de la variable.**

$$\frac{-4x}{-4} = \frac{10}{-4} \text{ (division des deux côtés de l'équation par la même valeur)}$$

$$x = -\frac{5}{2} = -2,5 \text{ (simplification)}$$

La solution est donc $x = -2,5$. Par vérification, substituons la valeur obtenue dans l'équation originale :

$$6(2x + 3) + x - 7 = 3(5x + 7) + 2x$$

$$6(2(-2,5) + 3) + (-2,5) - 7 = 3(5(-2,5) + 7) + 2(-2,5)$$

$$6(-5 + 3) - 2,5 - 7 = 3(-12,5 + 7) - 5$$

$$6(-2) - 2,5 - 7 = 3(-5,5) - 5$$

$$-12 - 2,5 - 7 = -16,5 - 5$$

$$-21,5 = -21,5 \text{ (vrai)}$$

2- Exercices - Solutions et résolution d'équations linéaires

Question 1

Encercler parmi les valeurs suivantes toutes les solutions de l'équation

$$x^2 + 3x = 18 ?$$

- a. 6
- b. 3
- c. -3
- d. -6

Solution : b et d

Question 2

Encercler toutes les solutions de l'équation $2x - 3y = 4$.

- a. $x = 2, y = 0$
- b. $x = 0, y = 2$
- c. $x = -1, y = -2$
- d. $x = 5, y = 2$

Solution : a, c, d

Question 3

Résoudre les équations suivantes :

- a. $3(x + 4) - 7 = 14x$
- b. $5y - 4 = -2(2y + 2)$
- c. $8(2z - 3) - 5z = 3z + 8$
- d. $2(x + 3) - 9 = 15x$
- e. $3z - 7 = 4(z + 2)$

Solution :

- a. $x = \frac{5}{11}$
- b. $y = 0$
- c. $z = 4$
- d. $x = -\frac{3}{13}$
- e. $z = -15$

Question 4

En pleine marche de santé, Jeanne se fait voler trente dollars. Au casino, elle triple la somme qui lui reste et retrouve ainsi le double du montant initial qu'elle transportait. Quel était celui-ci ?

Solution :

$$3(x - 3) = 2x \rightarrow x = 90$$

Question 5

Un conseiller financier suggère de toujours placer trois fois plus d'argent dans actions "nouvelles technologies" que les placements miniers. Combien une personne souhaitant placer un montant global de 2500 \$ devrait-elle investir dans chacun de ces secteurs ?

Solution :

625 \$ dans les placements miniers, 1875 \$ dans les actions nouvelles technologies

Question 6

Un vendeur reçoit un salaire hebdomadaire de base de 920 \$ auquel s'ajoute une compensation financière x par km pour ses déplacements en voiture. Au cours d'une semaine, ledit vendeur a parcouru 1200 km et a fait un salaire de 1475 \$. Quelle compensation financière reçoit-il par kilomètre ?

Solution :

46,25 ¢ par km

Question 7

En 1999, la compagnie VaVite a réalisé des profits qui dépassaient de 1,2 millions ceux de 1998. Pour ces deux années, les profits totaux de VaVite furent de 15,4 millions. Trouver le profit réalisé en 1998.

Solution :

7,1 millions en 1998

Question 8

Considérant que le taux d'imposition est de 35 % pour tout revenu excédant 8 500 \$ (c'est-à-dire, les 8500 premiers dollars sont déductibles), quel est le revenu annuel d'une personne qui paie 5250 \$ en impôts ?

Solution :

Soit x : le revenu annuel

$$35 \% (x - 8500) = 5250$$

$$\rightarrow x = 23\,500\$$$