Chapitre 9. Le problème du postier chinois non orienté - Solutions

2. Modèle linéaire des appariements

(a) Les sommets impairs du réseau sont les sommets 2, 4, 6 et 8. Le tableau suivant indique la longueur des CLPC entre ces sommets.

	4	6	8
2	3097	3309	3597
4	-	3252	2914
6	-	-	2788

Les variables de décision du modèle sont les variables binaires x_{ij}, où i et j sont des numéros de sommets impairs et où $i < j$, définies de la façon suivante :

$$x_{ij} = 1 \quad \text{si le sommet impair } i \text{ est couplé avec le sommet impair } j.$$

Le modèle linéaire consiste à minimiser

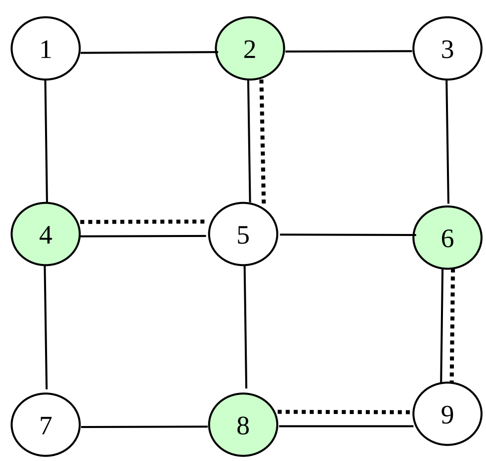
$$z = 3097\, x_{24} + 3309\, x_{26} + 3597\, x_{28} + 3252\, x_{46} + 2914\, x_{48} + 2788\, x_{68}$$

sous les contraintes :

$$x_{24} + x_{26} + x_{28} = 1$$
$$x_{24} + x_{46} + x_{48} = 1$$
$$x_{26} + x_{46} + x_{68} = 1$$
$$x_{28} + x_{48} + x_{68} = 1$$
$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \text{pour tous } i, j \in \{2, 4, 6, 8\} \text{ tels que } i < j.$$

(b) Une solution optimale de ce modèle indique que $x_{24} = x_{68} = 1$ et que les autres variables prennent la valeur 0. Le coût total des appariements est de 5885. Le sommet 2 est apparié au sommet 4 par la chaîne 2 – 5 – 4 tandis que le sommet 6 est relié au sommet 8 par la chaîne 6 – 9 – 8.

(c) La figure ci-dessous est obtenue après l'ajout des copies d'arêtes associées aux appariements optimaux. Voici une tournée eulérienne optimale de ce multiréseau : 1–2–3–6–9–6–5–2–5–8–9–8–7–4–5–4–1.



(d) Voici une autre tournée eulérienne optimale : 1 – 2 – 3 – 6 – 9 – 6 – 5 – 8 – 9 – 8 – 7 – 4 – 5 – 2 – 5 – 4 – 1.

(e) La durée totale des passages hors service dans les tournées données en (c) et en (d) est 5885. Dans toute tournée eulérienne optimale, la durée totale des passages hors service est identique.

3. Tournée optimale ou non optimale?

(a) Les seuls sommets impairs du réseau sont 1 et 7. Le CLPC entre 1 et 7 est 1 – 5 – 7 et sa longueur est égale à $d_{17} = 2 + 5 = 7$. Puisque les arêtes ajoutées sont de longueur totale 4 + 6 = 10, le choix des arêtes ajoutées n'est pas optimal.

(b) Les seuls sommets impairs du réseau sont 6 et 9. Le CLPC entre 6 et 9 est 6 – 9 et sa longueur est égale à $d_{69} = 1$. Puisque les arêtes ajoutées sont de longueur totale 1 + 1 = 2, le choix des arêtes hors service ajoutées n'est pas optimal.

Noter que cette conclusion était prévisible puisque le CLPC illustré dans l'énoncé, soit 6 – 9 – 8 – 9, n'est pas une chaîne élémentaire, contrairement au commentaire de la page 405.

(c) Les sommets impairs du réseau sont 2, 4, 6 et 8; les longueurs d_{ij} des arêtes du réseau des appariements sont toutes égales à 10; enfin, une tournée optimale utilisera deux de ces arêtes et les arêtes ajoutées sont de longueur totale 10 + 10 = 20. Par conséquent, le choix des arêtes hors service ajoutées est optimal.

4. Tournées eulériennes optimales dans un réseau non orienté

(a) L'ensemble des sommets impairs du réseau est $I = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Le tableau suivant indique la longueur des CLPC entre ces sommets.

	4	**5**	**6**	**7**	**8**
3	7	23	33	49	62
4	-	30	40	56	69
5	-	-	10	26	39
6	-	-	-	36	38
7	-	-	-	-	13

Les appariements optimaux des sommets impairs sont obtenus en résolvant le modèle linéaire suivant.

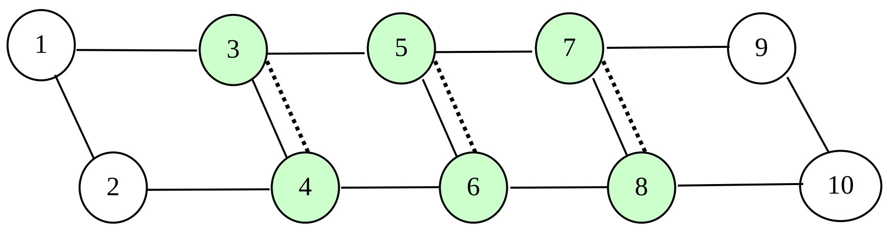
$$\text{Min} \quad z = 7\,x_{34} + 23\,x_{35} + 33\,x_{36} + 49\,x_{37} + 62\,x_{38} + 30\,x_{45} + 40\,x_{46} + \ldots + 38\,x_{68} + 13\,x_{78}$$

sous les contraintes :

$$x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} = 1$$

$$x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} = 1$$
$$x_{35} + x_{45} + x_{56} + x_{57} + x_{58} = 1$$
$$x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{67} + x_{68} = 1$$
$$x_{37} + x_{47} + x_{57} + x_{67} + x_{78} = 1$$
$$x_{38} + x_{48} + x_{58} + x_{68} + x_{78} = 1$$
$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \text{pour tous } i, j \in I \text{ tels que } i < j.$$

Une solution optimale de ce modèle indique que $x_{34} = x_{56} = x_{78} = 1$, les autres variables étant nulles. Des copies des arêtes 34, 56 et 78 sont donc ajoutées au graphe, pour une durée totale des passages hors service de 30 unités. On obtient le multigraphe représenté ci-dessous. Une tournée eulérienne optimale dans ce multigraphe est : 1 – 3 – 4 – 3 – 5 – 6 – 5 – 7 – 8 – 7 – 9 – 10 – 8 – 6 – 4 – 2 – 1.



(b) Tous les sommets sont impairs, sauf 1. Le tableau suivant indique la longueur des CLPC entre ces sommets.

	3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2	11	13	1	9	5	6	5
3	-	2	10	12	8	9	8
4	-	-	12	14	10	11	10
5	-	-	-	8	4	5	4
6	-	-	-	-	6	7	6
7	-	-	-	-	-	3	2
8	-	-	-	-	-	-	3

Les appariements optimaux des sommets impairs sont obtenus en résolvant le modèle linéaire suivant.

Min $z = 11\,x_{23} + 13\,x_{24} + 1\,x_{25} + 9\,x_{26} + 5\,x_{27} + 6\,x_{28} + 5\,x_{29} + 2\,x_{34} + 10\,x_{35} + \ldots + 2\,x_{79} + 3\,x_{89}$

sous les contraintes :

$$x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} = 1$$
$$x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} + x_{39} = 1$$
$$x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} + x_{49} = 1$$
$$x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{56} + x_{57} + x_{58} + x_{59} = 1$$

$$x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{67} + x_{68} + x_{69} = 1$$

$$x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} + x_{67} + x_{78} + x_{79} = 1$$

$$x_{28} + x_{38} + x_{48} + x_{58} + x_{68} + x_{78} + x_{89} = 1$$

$$x_{29} + x_{39} + x_{49} + x_{59} + x_{69} + x_{79} + x_{89} = 1$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \text{pour tous } i, j \in I \text{ tels que } i < j.$$

Une solution optimale de ce modèle indique que $x_{25} = x_{34} = x_{68} = x_{79} = 1$, les autres variables étant nulles. Des copies des arêtes 25, 34, 16, 18, 17 et 19 sont donc ajoutées au graphe, pour une durée totale des passages hors service de 12 unités. Une tournée eulérienne optimale dans ce multigraphe est : 1 – 7 – 2 – 5 – 9 – 6 – 3 – 4 – 8 – 7 – 1 – 2 – 5 – 1 – 3 – 4 – 1 – 8 – 1 – 9 – 1 – 6 – 1.

(c) Tous les sommets sont impairs, sauf 3 et 6. Le tableau suivant indique la longueur des CLPC entre ces sommets.

	2	**4**	**5**	**7**	**8**
1	1	1	2	2	2
2	-	2	1	1	2
4	-	-	1	1	1
5	-	-	-	1	2
7	-	-	-	-	1

Les appariements optimaux des sommets impairs sont obtenus en résolvant le modèle linéaire suivant.

$$\text{Min} \quad z = 1\,x_{12} + 1\,x_{14} + 1\,x_{15} + 1\,x_{17} + 1\,x_{18} + 1\,x_{24} + 1\,x_{25} + 1\,x_{27} + \ldots + 1\,x_{58} + 1\,x_{78}$$

sous les contraintes :

$$x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{17} + x_{18} = 1$$

$$x_{12} + x_{24} + x_{25} + x_{27} + x_{28} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{45} + x_{47} + x_{48} = 1$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{45} + x_{57} + x_{58} = 1$$

$$x_{17} + x_{27} + x_{47} + x_{57} + x_{78} = 1$$

$$x_{18} + x_{28} + x_{48} + x_{58} + x_{78} = 1$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \text{pour tous } i, j \in I \text{ tels que } i < j.$$

Une solution optimale de ce modèle indique que $x_{12} = x_{48} = x_{57} = 1$, les autres variables étant nulles. Des copies des arêtes 12, 48 et 57 sont donc ajoutées au graphe, pour une durée totale des passages hors service de 3 unités. Une tournée eulérienne optimale dans ce multigraphe est : 1 – 2 – 5 – 7 – 8 – 4 – 5 – 7 – 6 – 5 – 3 – 6 – 2 – 7 – 4 – 8 – 3 – 1 – 4 – 3 – 2 – 1.

(d) Les sommets impairs sont 3, 5, 6 et 7. Le tableau suivant indique la longueur des CLPC entre ces sommets.

	5	**6**	**7**
3	17	10	14
5	-	7	3
6	-	-	4

Les appariements optimaux des sommets impairs sont obtenus en résolvant le modèle linéaire suivant.

Min $z = 17\,x_{35} + 10\,x_{36} + 14\,x_{37} + 7\,x_{56} + 3\,x_{57} + 4\,x_{67}$

sous les contraintes :

$$x_{35} + x_{36} + x_{37} = 1$$

$$x_{35} + x_{56} + x_{57} = 1$$

$$x_{36} + x_{56} + x_{67} = 1$$

$$x_{37} + x_{57} + x_{67} = 1$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \text{pour tous } i, j \in I \text{ tels que } i < j.$$

Une solution optimale de ce modèle indique que $x_{36} = x_{57} = 1$, les autres variables étant nulles. Des copies des arêtes 36 et 57 sont donc ajoutées au graphe, pour une durée totale des passages hors service de 13 unités. Une tournée eulérienne optimale dans ce multigraphe est : 1 – 2 – 3 – 6 – 5 – 7 – 4 – 1 – 6 – 4 – 5 – 7 – 2 – 6 – 3 – 7 – 1. Une autre tournée eulérienne optimale, qui comporte une arête de plus, est 1 – 2 – 3 – 7 – 5 – 6 – 3 – 6 – 1 – 4 – 5 – 4 – 6 – 2 – 7 – 4 – 7 – 1.

5. Recherche du nid familial

Les sommets impairs sont 1, 4, 6 et 7. Le tableau suivant indique la longueur des CLPC entre ces sommets.

	4	**6**	**7**
1	12	6	3
4	-	14	9
6	-	-	5

Les appariements optimaux des sommets impairs sont obtenus en résolvant le modèle linéaire suivant.

Min $z = 12\,x_{14} + 6\,x_{16} + 3\,x_{17} + 14\,x_{46} + 9\,x_{47} + 5\,x_{67}$

sous les contraintes :

$$x_{14} + x_{16} + x_{17} = 1$$

$$x_{14} + x_{46} + x_{47} = 1$$

$$x_{16} + x_{46} + x_{67} = 1$$

$$x_{17} + x_{47} + x_{67} = 1$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \text{pour tous } i, j \in I \text{ tels que } i < j.$$

Une solution optimale de ce modèle indique que $x_{16} = x_{47} = 1$, les autres variables étant nulles. Des copies des arêtes 12, 26, 34 et 37 sont donc ajoutées au graphe, pour une durée totale des passages hors service de 15 minutes. Une tournée eulérienne optimale dans ce multigraphe est : 1 – 2 – 5 – 4 – 3 – 7 – 4 – 3 – 7 – 5 – 1 – 2 – 6 – 7 – 2 – 6 – 1.

6. Artificier

L'ensemble des sommets impairs du réseau est $Im = \{G, D, K, B, I, F\}$. Le tableau suivant indique la longueur des CLPC entre ces sommets, en centaines de mètres.

	D	**K**	**B**	**I**	**F**
G	1	2	3	2	3
D	-	3	2	3	2
K	-	-	3	2	3
B	-	-	-	3	2
I	-	-	-	-	1

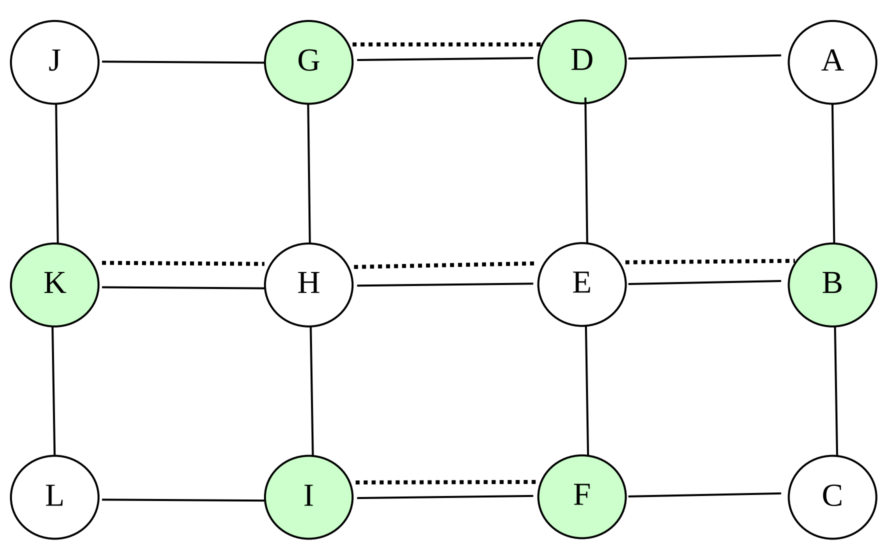
Les appariements optimaux des sommets impairs sont obtenus en résolvant le modèle linéaire suivant.

Min $z = 1\,x_{GD} + 2\,x_{GK} + 3\,x_{GB} + 2\,x_{GI} + 3\,x_{GF} + 3\,x_{DK} + 2\,x_{DB} + \ldots + 2\,x_{BF} + 1\,x_{IF}$

sous les contraintes :

$$x_{GD} + x_{GK} + x_{GB} + x_{GI} + x_{GF} = 1$$
$$x_{GD} + x_{DK} + x_{DB} + x_{DI} + x_{DF} = 1$$
$$x_{GK} + x_{DK} + x_{KB} + x_{KI} + x_{KF} = 1$$
$$x_{GB} + x_{DB} + x_{KB} + x_{BI} + x_{BF} = 1$$
$$x_{GI} + x_{DI} + x_{KI} + x_{BI} + x_{IF} = 1$$
$$x_{GF} + x_{DF} + x_{KF} + x_{BF} + x_{IF} = 1$$
$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \text{pour tous } i, j \in Im \text{ tels que } i \text{ est «avant» } j.$$

Une solution optimale de ce modèle indique que $x_{GD} = x_{IF} = x_{KB} = 1$, les autres variables étant nulles. Des copies des arêtes GD, IF, KH, HE et EB sont donc ajoutées au graphe, pour une durée totale des passages hors service de 500 mètres. Une tournée eulérienne optimale dans ce multigraphe est : A – B – E – B – C – F – E – H – E – D – G – H – I – F – I – L – K – H – K – J – G – D – A.



7. Parcomètre

Dans le réseau non orienté dans lequel se déplace le préposé, les sommets impairs sont d, g, h, i, k et m. Le tableau suivant indique la longueur des CLPC entre ces sommets.

	g	**h**	**i**	**k**	**m**
d	12	8	30	16	28
g	-	10	18	18	16
h	-	-	28	8	26
i	-	-	-	20	18
k	-	-	-	-	18

Les appariements optimaux des sommets impairs sont obtenus en résolvant le modèle linéaire suivant.

Min $z = 12\, x_{dg} + 8\, x_{dh} + 30\, x_{di} + 16\, x_{dk} + 28\, x_{dm} + 10\, x_{gh} + 18\, x_{gi} + \ldots + 18\, x_{im} + 18\, x_{km}$

sous les contraintes :

$$x_{dg} + x_{dh} + x_{di} + x_{dk} + x_{dm} = 1$$
$$x_{dg} + x_{gh} + x_{gi} + x_{gk} + x_{gm} = 1$$
$$x_{dh} + x_{gh} + x_{hi} + x_{hk} + x_{hm} = 1$$
$$x_{di} + x_{gi} + x_{hi} + x_{ik} + x_{im} = 1$$
$$x_{dk} + x_{gk} + x_{hk} + x_{ik} + x_{km} = 1$$
$$x_{dm} + x_{gm} + x_{hm} + x_{im} + x_{km} = 1$$
$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \text{pour tous } i, j \in Im \text{ tels que } i \text{ est «avant» } j.$$

Une solution optimale de ce modèle indique que $x_{dg} = x_{hk} = x_{lm} = 1$, les autres variables étant nulles. Des copies des arêtes dg, hk, il et lm sont donc ajoutées au graphe, pour une durée totale des passages hors service de 38 unités. Une tournée eulérienne optimale dans ce multigraphe est : d – c – b – a – e – f – i – l – m – j – i – l – m – n – k – h – g – d – g – f – c – g – j – k – h – d.

9. Distribution d'échantillons

Nous avons retenu ici un modèle linéaire calqué sur celui décrit en note 14. Notons t_{ij} le nombre total de parcours de l'arête *ij* dans le sens *i* de vers *j*. Il s'agit de minimiser

$$z' = 5(t_{12} + t_{21}) + 6(t_{14} + t_{41}) + 5\,(t_{23} + t_{32}) + \ldots + 10\,(t_{AC} + t_{CA}) + 7\,(t_{BC} + t_{CB}).$$

Le modèle linéaire comporte 12 équations «SOMMET *i*», où *i* est l'un des sommets du réseau, et 17 inéquations «ARETE *ij*», où *ij* est l'une des arêtes du réseau; de plus, on exige que les variables t_{ij} soient des nombres entiers non négatifs. La contrainte «SOMMET *i*» exige que le flot net en ce sommet soit nul : par exemple,

SOMMET 1 $\quad t_{12} + t_{14} = t_{21} + t_{41}$

SOMMET 5 $\quad t_{52} + t_{54} + t_{58} = t_{25} + t_{45} + t_{85}$

SOMMET C $\quad t_{C9} + t_{C7A} + t_{CB} = t_{9C} + t_{AC} + t_{BC}$.

Les inéquations «ARETE *ij*» garantissent que chaque arête soit parcourue deux fois, à l'exception de 36, 6B et BC pour lesquelles un seul passage suffit : par exemple,

ARETE 12 $t_{12} + t_{21} \geq 2$

ARETE 58 $t_{58} + t_{85} \geq 2$

ARETE 36 $t_{36} + t_{36} \geq 1$.

Dans l'une des solutions optimales, les seules arêtes parcourues hors service sont 36, 6B et BC. Par conséquent, la durée hors service minimale z^* est : $z^* = 8 + 10 + 7 = 25$. Voici une tournée eulérienne optimale (avec deux passages pour les 16 tronçons qui ne jouxtent pas le parc) : 1 – 4 – 5 – 8 – 9 – C – B – 6 – 2 – 5 – 4 – 7 – A – C – A – 9 – C – B – 6 – 2 – 5 – 8 – 6 – 3 – 2 – 1 – 4 – 7 – A – 9 – 8 – 7 – 8 – B – 8 – 6 – 3 – 2 – 1.

10. Modèle linéaire du PCNO

(a) Nous avons retenu ici le modèle moins lourd décrit en note 14. Notons t_{ij} le nombre total de parcours de l'arête *ij* dans le sens *i* de vers *j*. Il s'agit de minimiser

$$z' = 1420(t_{12} + t_{21}) + 1678(t_{14} + t_{41}) + 1911\,(t_{23} + t_{32}) + \ldots + 1356\,(t_{89} + t_{98}).$$

Le modèle linéaire comporte 9 équations «SOMMET *i*», où *i* est l'un des sommets du réseau, et 12 inéquations «ARETE *ij*», où *ij* est l'une des arêtes du réseau; de plus, on exige que les variables t_{ij} soient des nombres entiers non négatifs. Voici quelques exemples de ces contraintes.

SOMMET 1 $t_{12} + t_{14} = t_{21} + t_{41}$

SOMMET 5 $t_{52} + t_{54} + t_{56} + t_{58} = t_{25} + t_{45} + t_{65} + t_{85}$

SOMMET 8 $t_{85} + t_{87} + t_{89} = t_{58} + t_{78} + t_{98}$

ARETE 12 $t_{12} + t_{21} \geq 1$

ARETE 58 $t_{58} + t_{85} \geq 1$

(b) À l'optimum, la fonction-objectif z' prend la valeur 25 788. La durée hors service minimale z^* s'obtient en retranchant la somme des durées hors service sur l'ensemble des arêtes :

$$z^* = 25\,788 - (1420 + 1678 + 1911 + \ldots + 1356) = 5885.$$

Voici une tournée eulérienne optimale : 1 – 2 – 3 – 6 – 9 – 8 – 5 – 2 – 5 – 4 – 7 – 8 – 9 – 6 – 5 – 4 – 1.

11. Un réseau orienté non eulérien

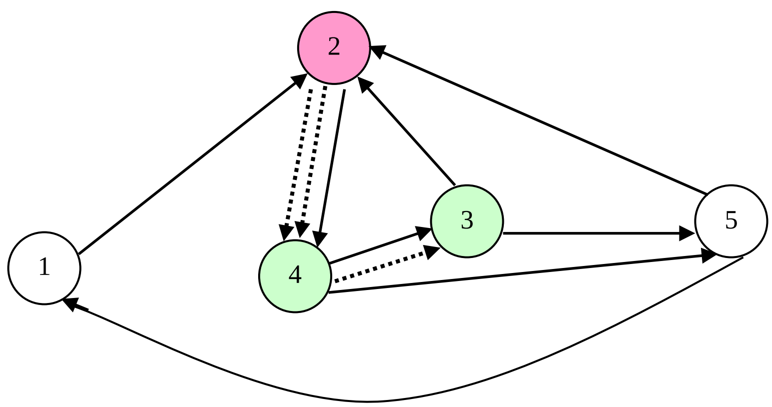
Le graphe n'est pas fortement connexe : par exemple, le sommet 1 n'est pas accessible à partir de 4.

12. Tournée eulérienne dans un réseau orienté

Les degrés intrants et extrants des sommets du réseau sont donnés au tableau suivant.

	degré intrant (d_i^-)	**degré extrant (d_i^+)**	**$d_i^- - d_i^+$**
1	1	1	0
2	3	1	2
3	1	2	-1
4	1	2	-1
5	2	2	0

D'après ce tableau, le sommet 2 est déséquilibré à l'intrant de deux unités, tandis que les sommets 3 et 4 sont déséquilibrés à l'extrant, chacun d'une unité. Il faut donc ici envoyer, au moindre coût, une unité de glot du sommet 2 au sommet 3 et une unité de glot du sommet 2 au sommet 4, en prenant comme coût d'écoulement du glot les longueurs d_{23} et d_{24} des chemins les plus courts. Or, le CLPC du sommet 2 au sommet 4 est le chemin réduit à la seule arête 24 et est de longueur 5 ; et le CLPC du sommet 2 au sommet 3 est le chemin 2 – 4 – 3, de longueur 6. La solution optimale est évidente et nous conduit au réseau suivant dans lequel deux copies de l'arc 24 et une copie de l'arc 43 ont été ajoutées.



Voici une tournée eulérienne optimale dans ce multiréseau : 1 – 2 – 4 – 3 – 5 – 2 – 4 – 3 – 2 – 4 – 5 – 1.