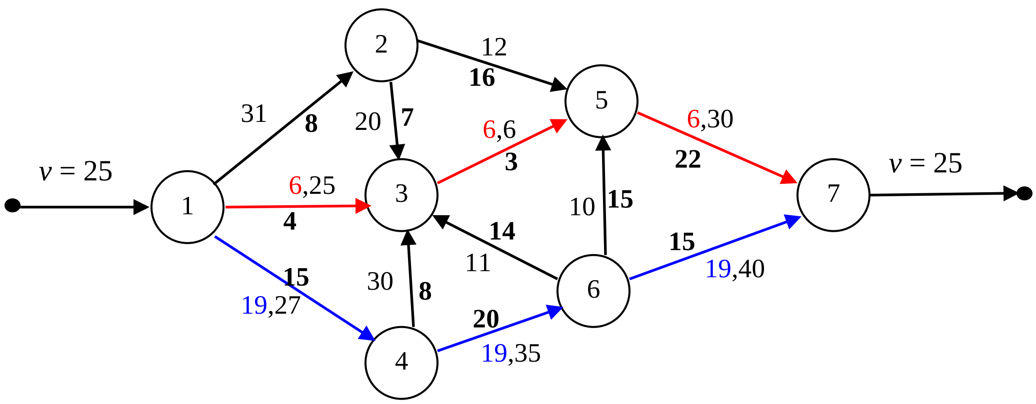
Chapitre 6. Le problème de flot à coût minimal - Solutions

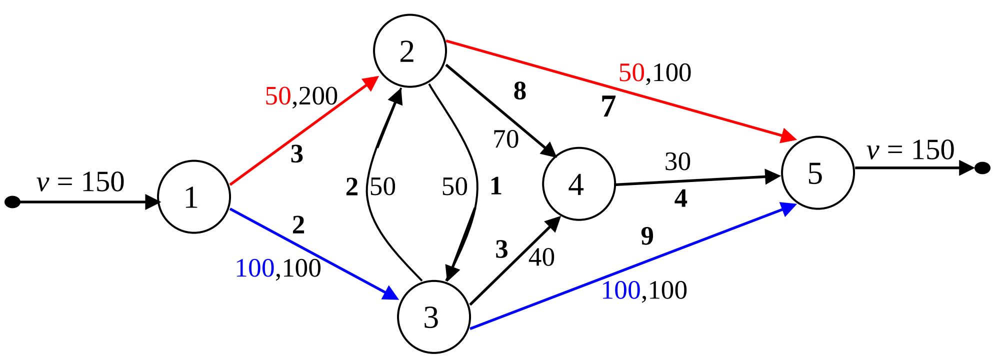
1. Solutions admissibles

(a) La figure suivante illustre une solution admissible : six unités de flot sont acheminées de la source au puits sur le chemin 1–3–5–7, et 19 unités sont acheminées sur le chemin 1–4–6–7. Le coût de cette solution est z = 1 124 :

$$z \;=\; 6\times(4+3+22)+19\times(15+20+15) \;=\; 1\,124.$$



(b) La figure suivante illustre une solution admissible : 50 unités de flot sont acheminées de la source au puits sur le chemin 1–2–5, et 100 unités sont acheminées au puits sur le chemin 1–3–5. Le coût de cette solution est 1 600.

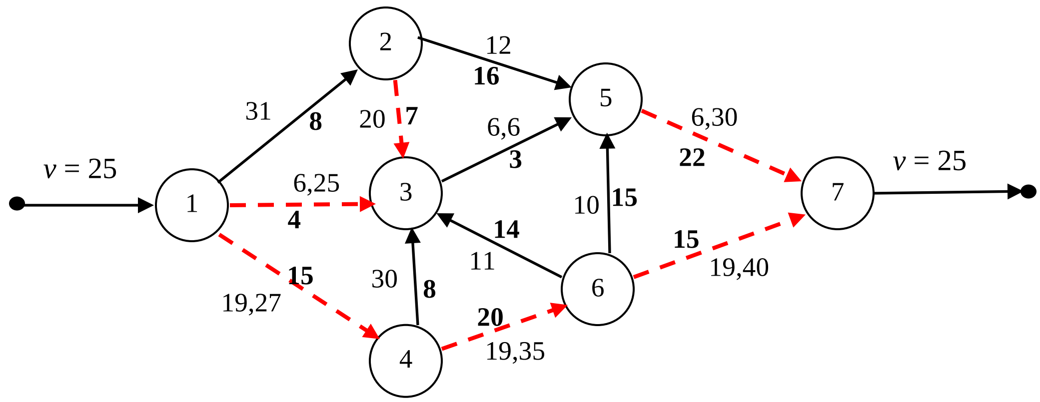


2. Solution optimale

Initialisation (itération 0). Étape 0 (construction d'une solution admissible). Cette étape a été complétée dans la question 1(a). Le coût total de cette solution est z = 1124.

Initialisation (itération 0). Étape 1 (construction d'une solution admissible sans cycle d'arcs flottants). La solution obtenue lors de l'étape 0 ne contient aucun cycle d'arcs flottants.

Initialisation (itération 0). Étape 2 (construction d'une solution admissible de base). La figure suivante illustre la solution de base initiale, les arcs tiretés (en rouge) dénotant les arcs de base. Les arcs 13, 14, 46, 57 et 67 font nécessairement partie de l'arborescence de base, car ce sont des arcs flottants. Il faut compléter la base par un arc à flot nul ou saturé. L'arc 23 est placé dans la base pour compléter l'arborescence à cause de son faible coût. Noter que l'arc 35 ne peut faire partie de la base, car son introduction dans la base créerait un cycle.



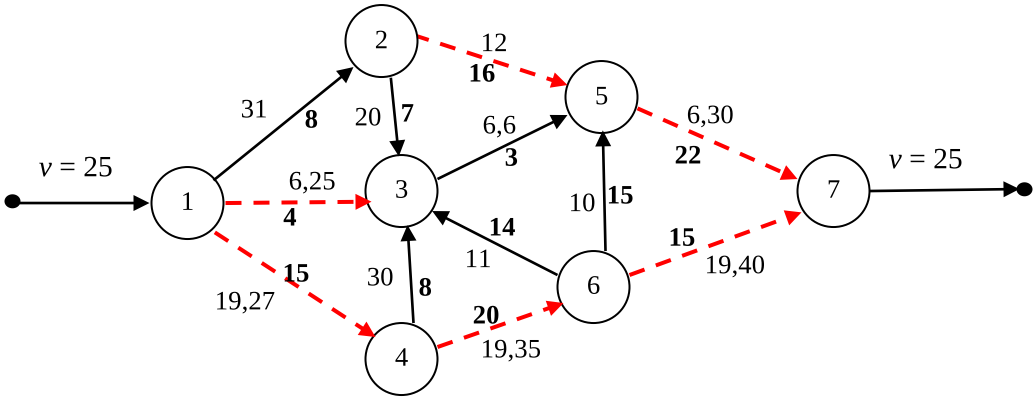
Initialisation (itération 0). Étape 3. (calcul des coûts marginaux). Les coûts marginaux associés à la solution de base initiale sont calculés dans le tableau ci-dessous.

Arc hors base	*Statut*	*Cycle*	*Coût unitaire*	*Coût marginal*	*Borne sup. de Δ*	*Diminution*
12	à flot nul	12 : + Δ 23 : + Δ 13 : – Δ	+ 8 + 7 – 4	+11		
25	à flot nul	25 : + Δ 57 : + Δ 67 : – Δ 46 : – Δ 14 : – Δ 13 : + Δ 23 : – Δ	+16 +22 –15 –20 –15 + 4 – 7	**–15**	12 24 19 19 19 19 → **0**	**15 × 0 = 0**
35	saturé	35 : – Δ 57 : – Δ 67 : + Δ 46 : + Δ 14 : + Δ 13 : – Δ	– 3 –22 +15 +20 +15 – 4	+21		
43	à flot nul	43 : + Δ 13 : – Δ 14 : + Δ	+ 8 – 4 +15	+19		
63	à flot nul	63 : + Δ 13 : – Δ 14 : + Δ 46 : + Δ	+14 – 4 +15 +20	+45		
65	à flot nul	65 : + Δ 57 : + Δ 67 : – Δ	+15 +22 –15	+22		

Initialisation (itération 0). Étape 4 (test d'optimalité). La solution courante n'est pas optimale, car le coût marginal de l'arc hors base 25 est négatif.

Itération 1. Étape 5. L'arc 25 deviendra arc de base. Ici, aucun ajustement au flot circulant dans le réseau n'est requis, car la valeur limite est Δ = 0.

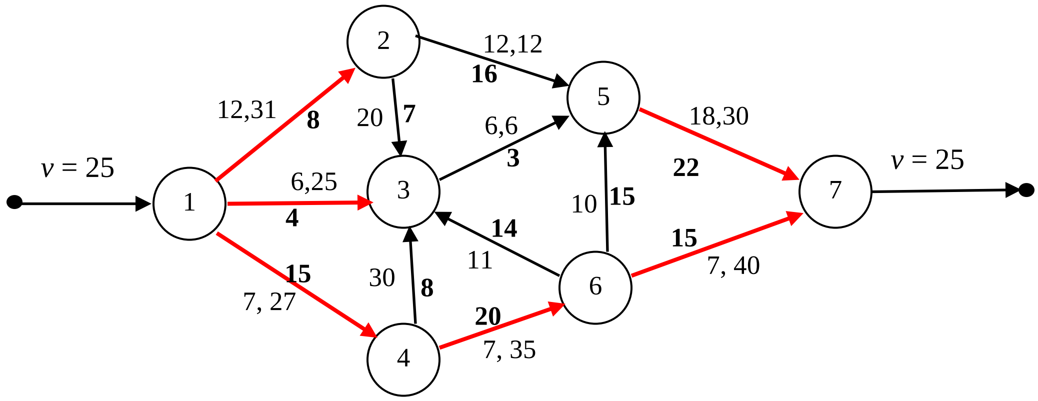
Itération 1. Étape 6. L'arc 23 est retiré de la base. La nouvelle solution de base est illustrée ci-dessous. Le coût de cette solution est $z = 1\,124 - (15 \times 0) = 1\,124$.



Itération 1. Étapes 3 et 4. Les coûts marginaux associés à la solution n° 1 sont calculés dans le tableau ci-dessous. Comme le coût marginal de l'arc hors base 12 est négatif, la solution courante n'est pas optimale.

Arc hors base	*Statut*	*Cycle*	*Coût unitaire*	*Coût marginal*	*Borne sup. de Δ*	*Diminution*
12	à flot nul	12 : + Δ 25 : + Δ 57: + Δ 67 : – Δ 46 : – Δ 14 : – Δ	+ 8 +16 +22 –15 –20 –15	**– 4**	31 → **12** 24 19 19 19	**4 × 12 = 48**
23	à flot nul			+15		
35	saturé	35 : – Δ 57 : – Δ 67 : + Δ 46 : + Δ 14 : + Δ 13 : – Δ	– 3 –22 +15 +20 +15 – 4	+21		
43	à flot nul	43 : + Δ 13 : – Δ 14 : + Δ	+ 8 – 4 +15	+19		
63	à flot nul	63 : + Δ 13 : – Δ 14 : + Δ 46 : + Δ	+14 – 4 +15 +20	+45		
65	à flot nul	65 : + Δ 57 : + Δ 67 : – Δ	+15 +22 –15	+22		

Itération 2. Étapes 5 et 6. La seule diminution possible est associée à l'arc à flot nul 12. On augmentera de $\Delta = 12$ unités le flot transitant par l'arc 12, puis on ajustera le flot sur les arcs de base du cycle de façon à maintenir l'admissibilité de la solution. La valeur maximale $\Delta = 12$ est associée à l'arc de base 25 : cet arc sera retiré de la base. La solution de base n° 2 résultante est illustrée ci-dessous. Son coût total est $z = 1\,124 - 48 = 1\,076$.



Itération 2. Étapes 3 et 4. Les coûts marginaux associés à la solution n° 2 sont calculés dans le tableau ci-dessous. Tous ces coûts marginaux sont positifs : par conséquent, la solution de base n° 2 est optimale.

Arc hors base	***Statut***	***Cycle***	***Coût unitaire***	***Coût marginal***	***Borne sup. de Δ***	***Diminution***
23	à flot nul	23 : + Δ 13 : – Δ 12 : + Δ	+ 7 – 4 + 8	+11		
25	saturé			+ 4		
35	saturé	35 : – Δ 57 : – Δ 67 : + Δ 46 : + Δ 14 : + Δ 13 : – Δ	– 3 –22 +15 +20 +15 – 4	+21		
43	à flot nul	43 : + Δ 13 : – Δ 14 : + Δ	+ 8 – 4 +15	+19		
63	à flot nul	63 : + Δ 13 : – Δ 14 : + Δ 46 : + Δ	+14 – 4 +15 +20	+45		
65	à flot nul	65 : + Δ 57 : + Δ 67 : – Δ	+15 +22 –15	+22		

3. Vérification de la non-optimalité

La solution illustrée n'est pas optimale, car elle comporte un cycle d'arcs flottants, soit le cycle $2 \rightarrow 3 \leftarrow 4 \rightarrow 2$, dont l'impact unitaire est non nul. En effet, convenons de diminuer de Δ unités les arcs avant 23 et 42, et d'augmenter de la même quantité l'arc arrière 43 : l'impact unitaire de ces changements est – 2 + 3 – 4 = –3. Ainsi, en posant Δ = 8, on obtient une nouvelle solution admissible dont le coût total est inférieur de $8 \times 3 = 24$ à celui de la solution illustrée.

4. Optimalité et coût marginal

L'arborescence de base comprend nécessairement les 3 arcs flottants 14, 25 et 45; convenons de compléter la base par l'arc à flot nul 35, dont le coût unitaire est minimal parmi les arcs restants. À l'arc hors base 23 est associé le cycle $2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \leftarrow 2$, et son coût marginal est $+ 6 + 2 - 17 = -9$. En faisant transiter un flot de 9 unités par l'arc 23 et en procédant aux ajustements requis sur les autres arcs du cycle, on obtient une nouvelle solution admissible dont le coût total est inférieur de $9 \times 9 = 81$ unités à celui de la solution illustrée.

5. Optimal ou non, voilà la question

(a) La solution illustrée n'est pas optimale, car elle n'est pas admissible : le flot n'est pas conservé aux sommets 4 et 7.

(b) La solution illustrée possède un cycle d'arcs flottants, soit le cycle $1 \rightarrow 4 \leftarrow 5 \leftarrow 1$, dont l'impact unitaire est égal à $+ 7 - 18 - 15 = -26$ et est donc non nul. En augmentant de 3 unités le flot sur l'arc avant 14 et en réduisant de la même quantité le flot sur les arcs arrière 54 et 15, on obtient nouvelle solution admissible dont le coût total est inférieur de $3 \times 26 = 78$ unités.

(c) La solution illustrée est optimale, car les coûts marginaux des arcs hors base sont tous positifs.

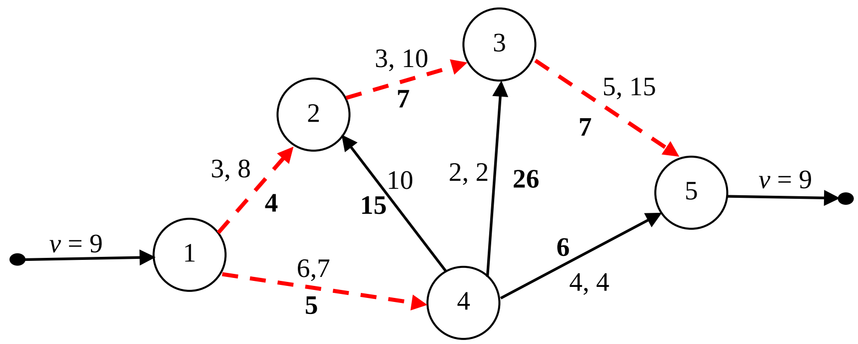
- Arc saturé 13 :
  Cycle : $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \leftarrow 4 \leftarrow 1$
  Coût marginal = $-4 - 9 + 8 + 6 = +1$.
- Arc 32 à flot nul :
  Cycle : $3 \rightarrow 2 \leftarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \leftarrow 3$
  Coût marginal = $2 - 5 + 6 + 8 - 9 = +2$.
- Arc 35 à flot nul :
  Cycle : $3 \rightarrow 5 \leftarrow 2 \leftarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \leftarrow 3$
  Coût marginal = $7 - 1 - 5 + 6 + 8 - 9 = +6$.
- Arc 43 à flot nul :
  Cycle : $4 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \leftarrow 4$
  Coût marginal = $4 + 9 - 8 = +5$.
- Arc saturé 56 :
  Cycle : $5 \rightarrow 6 \leftarrow 4 \leftarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$
  Coût marginal = $-6 + 8 + 6 - 5 - 1 = +2$.

(d) La solution illustrée n'est pas optimale. En effet, l'arborescence de base est constituée des 5 arcs flottants 12, 13, 24, 46 et 56. À l'arc hors base 23 est associé le cycle $2 \rightarrow 3 \leftarrow 1 \rightarrow 2$, et son coût marginal est $+ 43 - 71 + 16 = -12$. En faisant transiter un flot de 6 unités par l'arc 23 et en procédant aux ajustements requis sur les autres arcs du cycle, on obtient une nouvelle solution admissible dont le coût total est inférieur de $12 \times 6 = 72$ unités à celui de la solution illustrée.

6. L'algorithme du simplexe réseau - question (a)

Initialisation (itération 0). Étape 1. La solution illustrée, dont le coût total est $z = 174$, ne comporte aucun cycle d'arcs flottants.

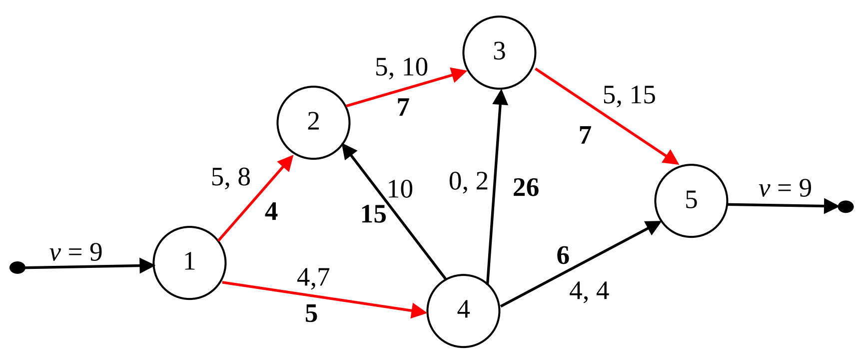
Étape 2. L'arborescence de base est constituée des 4 arcs flottants 12, 14, 23 et 35. Cette solution est illustrée ci-dessous.



Étapes 3 et 4. Les coûts marginaux des arcs hors base associés à la solution n° 0 sont calculés au tableau suivant. On constate que le coût marginal de l'arc 43 est négatif : la solution courante n'est donc pas optimale.

Arc hors base	***Statut***	***Cycle***	***Coût unitaire***	***Coût marginal***	***Borne sup. de Δ***	***Diminution***
42	à flot nul	42 : + Δ 12 : – Δ 14 : + Δ	+15 – 4 + 5	+16		
43	saturé	43 : – Δ 23 : + Δ 12 : + Δ 14 : – Δ	–26 + 7 + 4 – 5	**–20**	→ **2** 7 5 6	**2 × 20 = 40**
45	saturé	45 : – Δ 35 : + Δ 23 : + Δ 12 : + Δ 14 : – Δ	– 6 + 7 + 7 + 4 – 5	+ 7		

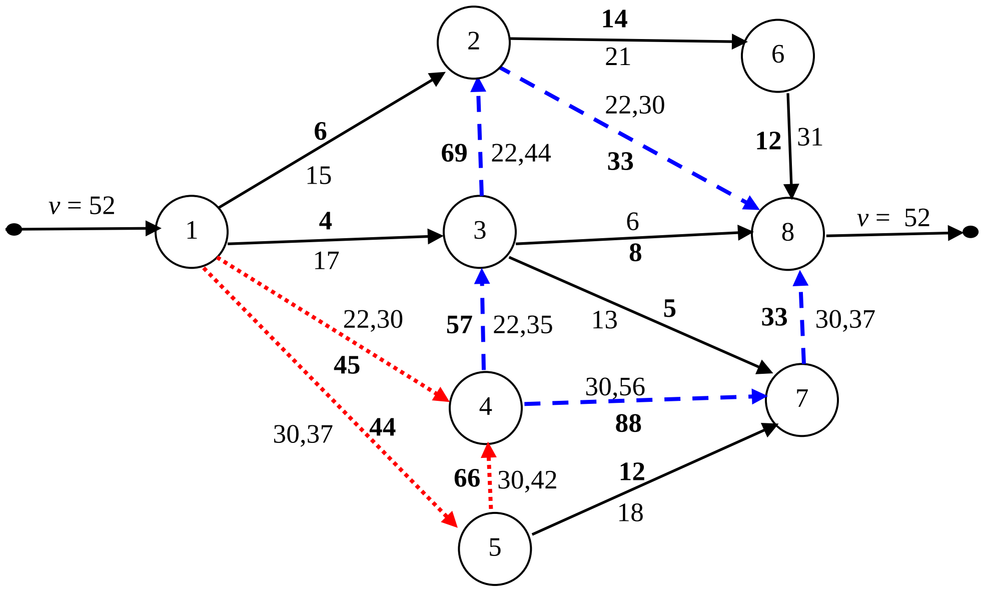
Itération 1. Étapes 5 et 6. La seule diminution possible est associée à l'arc à saturé 43. On diminuera de $\Delta = 2$ unités le flot transitant par l'arc 43, puis on ajustera le flot sur les arcs de base du cycle de façon à maintenir l'admissibilité de la solution. Ici, $\Delta \neq 0$ et l'arc 43 n'est pas devenu flottant, mais est devenu à flot nul. C'est donc la clause «Sinon» de l'algorithme (voir page 259) qui s'applique ici : l'arc 43 restera hors base, mais deviendra à flot nul dans la solution de base n° 1, qui est illustrée ci-dessous. Le coût total de cette solution n° 1 sera $z = 174 - 40 = 134$. Les coûts marginaux restent les mêmes, sauf celui de 43 qui change de signe et devient +20. On passe immédiatement à l'étape 4.



Étape 4. Les coûts marginaux des arcs hors base sont tous positifs : la solution courante est donc optimale.

6. L'algorithme du simplexe réseau - question (b)

Initialisation (itération 0). Étape 1. La solution illustrée, dont le coût total est z = 11 418, comporte deux cycles d'arcs flottants qu'il faut éliminer. Considérons d'abord le cycle 7 → 8 ← 2 ← 3 ← 4 → 7, qui est tireté et en bleu dans la figure ci-dessous. Et augmentons le flot sur l'arc 78 de Δ unités, où Δ ≥ 0. Le tableau au haut de la page suivante décrit les modifications au flot qui en découlent. On pose Δ = 7, et le coût total z est réduit de 7 × 38 = 266 unités.

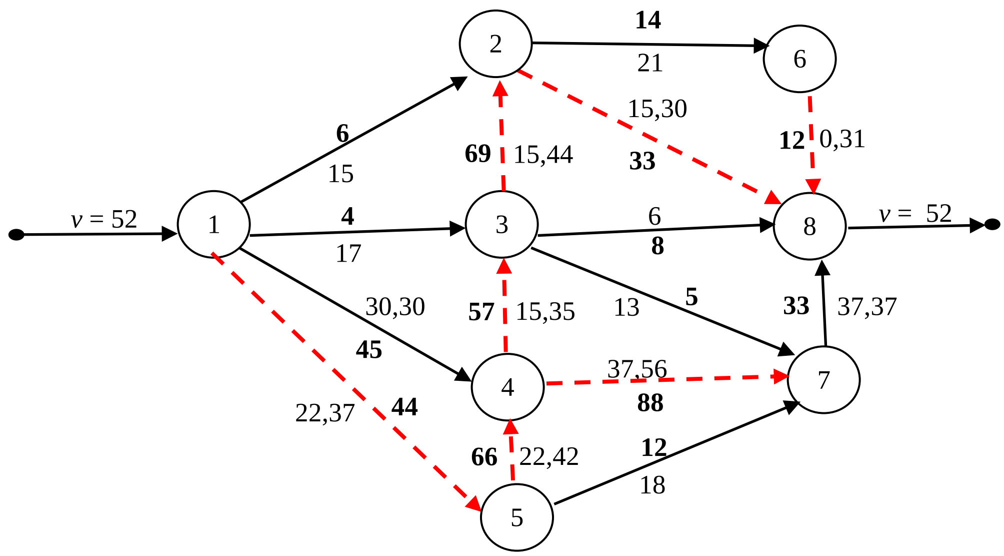


Arc	Effet sur le flot	Effet sur z	Borne sup. de Δ
78	+Δ	+33 Δ	→ **7**
28	–Δ	–33 Δ	22
32	–Δ	–69 Δ	22
43	–Δ	–57 Δ	22
47	+Δ	+88 Δ	26
Réduction nette	=	**–38 Δ**	**Min = 7**

Considérons maintenant le cycle 1 → 4 ← 5 ← 1, qui est en pointillé et en rouge dans la figure. Et augmentons le flot sur l'arc 14 de Δ unités, où Δ ≥ 0. Le tableau ci-dessous décrit les modifications au flot qui en découlent. On pose Δ = 8, et le coût total z est réduit de 8 × 65 = 520 unités.

Arc	Effet sur le flot	Effet sur z	Borne sup. de Δ
14	+Δ	+45 Δ	→ **8**
54	–Δ	–66 Δ	30
15	–Δ	–44 Δ	30
Réduction nette	=	**–65 Δ**	**Min = 8**

Étape 2. On obtient, après l'élimination des deux cycles, la solution admissible décrite ci-dessous, dont le coût total est z = 11 418 – 266 – 520 = 10 632 unités. Les 6 arcs flottants font d'office partie de la base. Comme l'arborescence des arcs de base doit comporter n – 1 = 7 arcs, il faut ajouter un arc : l'arc 68 est choisi, car il s'agit de l'arc non flottant de plus petit coût dont l'introduction ne crée pas de cycle avec les arcs de base. Dans la figure suivante, où est illustrée la solution de base n° 0, les arcs de base sont tiretés et en rouge.

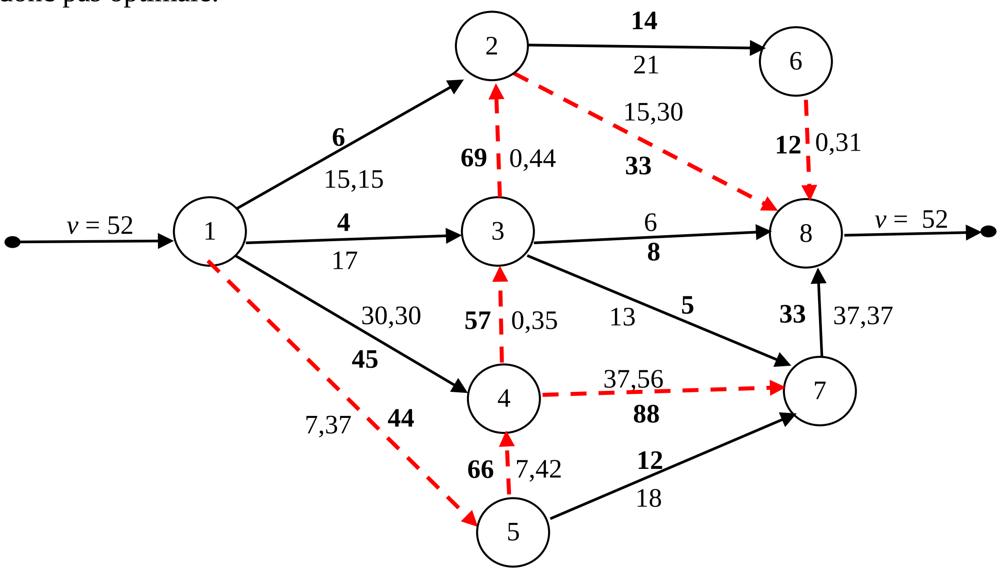


Étapes 3 et 4. Les coûts marginaux des arcs hors base associés à la solution n° 0 sont calculés au tableau suivant. On constate que plusieurs coûts marginaux sont négatifs : la solution courante n'est donc pas optimale.

Arc hors base	***Statut***	***Cycle***	***Coût unitaire***	***Coût marginal***	***Borne sup. de Δ***	***Diminution***
12	à flot nul	12 : + Δ 32 : – Δ 43 : – Δ 54: – Δ 15 : – Δ	+ 6 –69 –57 –66 –44	–230	→ 15 15 15 22 22	**230 × 15 = 3450**
13	à flot nul	13 : + Δ 43 : – Δ 54 : – Δ 15 : – Δ	+ 4 –57 –66 –44	–163	17 → 15 22 22	163 × 15 = 2445
14	saturé	14 : – Δ 54 : + Δ 15 : + Δ	–45 +66 +44	+65		
26	à flot nul	26 : + Δ 68 : + Δ 28 : – Δ	+14 +12 –33	–7	21 31 → 15	7 × 15 = 105
37	à flot nul	37 : + Δ 47 : – Δ 43 : + Δ	+ 5 –88 +57	–26	→ 13 37 20	26 × 13 = 338
38	à flot nul	38 : + Δ 28 : – Δ 32 : – Δ	+ 8 –33 –69	–94	→ 6 15 15	94 × 6 = 564
57	à flot nul	57 : + Δ 47 : – Δ 54 : – Δ	+12 –88 –66	–142	→ 18 37 22	142 × 18 = 2556
78	saturé	78 : – Δ 28 : + Δ 32 : + Δ 43 : + Δ 47 : – Δ	–33 +33 +69 +57 –88	+38		

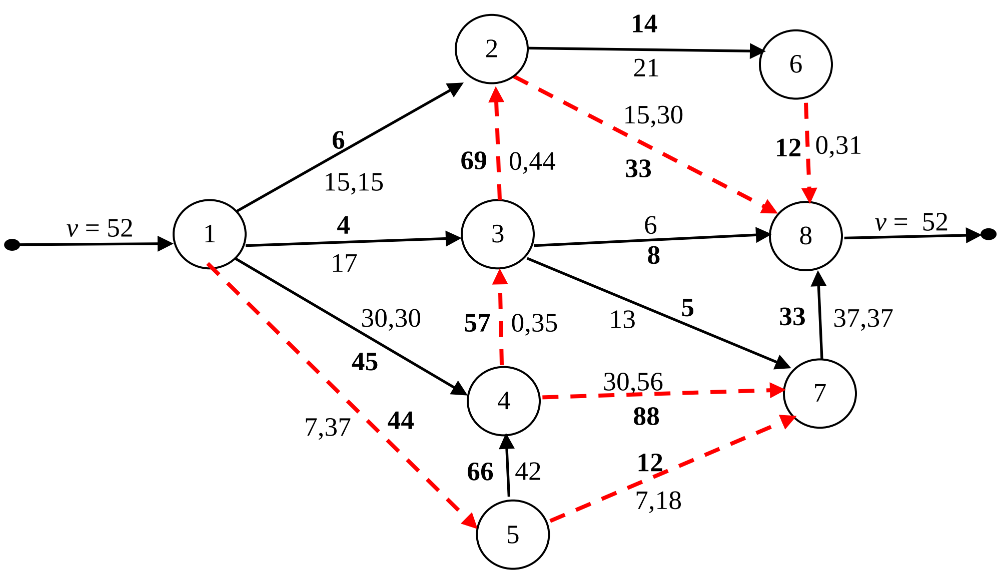
Itération 1. Étape 5. La plus grande diminution possible est associée à l'arc hors base 12. On ajoutera $\Delta = 15$ unités sur l'arc à flot nul 12, puis on ajustera le flot sur les arcs de base du cycle de façon à maintenir l'admissibilité de la solution. Ici, $\Delta \neq 0$ et l'arc 12 n'est pas devenu flottant, mais est devenu saturé. C'est donc la clause «Sinon» de l'algorithme (voir page 259) qui s'applique ici : l'arc 12 restera hors base, mais deviendra saturé dans la solution de base nº 1, qui est illustrée ci-dessous. Le coût total de cette solution nº 1 sera $z = 10\,632 - 3\,450 = 7\,182$. Les coûts marginaux restent les mêmes, sauf celui de 12 qui change de signe et devient +230. On passe immédiatement à l'étape 4.

Étape 4. Les coûts marginaux des arcs hors base 13, 26, 37, 38 et 57 sont négatifs : la solution courante n'est donc pas optimale.



Itération 2. Étape 5. Il faut calculer les diminutions $| CM_{ij} | \times \Delta$ associées aux 5 arcs hors base dont le coût marginal est négatif. Dans chaque cas, le cycle reste le même puisque l'arborescence des arcs de base n'a pas été modifiée. Seules changent les bornes découlant des arcs de base dont la valeur vient d'être modifiée. On vérifie que les bornes supérieures de Δ pour les arcs 13, 26, 37, 38 et 57 sont 0, 15, 0 13 et 7 respectivement. La plus grande diminution possible est associée à l'arc 57 et est égale à $142 \times 7 = 994$. On ajoutera $\Delta = 7$ unités sur l'arc à flot nul 57, puis on ajustera le flot sur les arcs de base du cycle de façon à maintenir l'admissibilité de la solution.

Étape 6. Dans le cycle de l'arc 57 entrant dans la base, la valeur maximale $\Delta = 7$ est associée à l'arc de base 54 : cet arc sera retiré de la base. La solution de base nº 2 résultante est illustrée ci-dessous. Son coût total est $z = 7\,182 - 994 = 6\,188$.

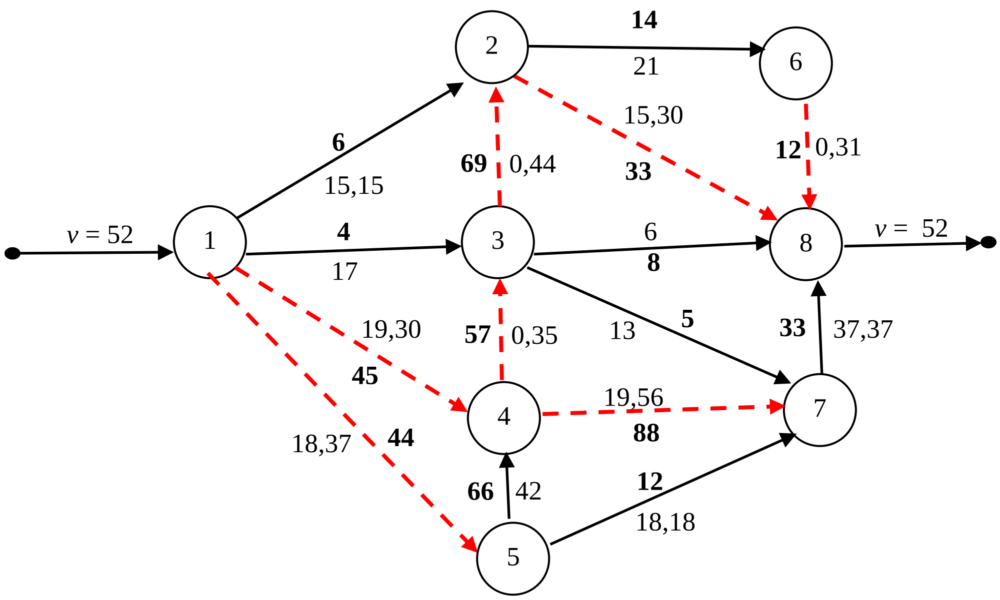


Étapes 3 et 4. Les coûts marginaux de la solution de base n° 2 sont calculés dans le tableau ci-dessous. On constate que plusieurs coûts marginaux sont négatifs : la solution courante n'est donc pas optimale.

Arc hors base	***Statut***	***Cycle***	***Coût unitaire***	***Coût marginal***	***Borne sup. de Δ***	***Diminution***
12	saturé	12 : – Δ 32 : + Δ 43 : + Δ 47 : – Δ 57 : + Δ 15 : + Δ	– 6 +69 +57 –88 +12 +44	+88		
13	à flot nul	13 : + Δ 43 : – Δ 47 : + Δ 57 : – Δ 15 : – Δ	+ 4 –57 +88 –12 –44	–21	17 → 0 26 7 7	21 × 0 = 0
14	saturé	14 : – Δ 47 : + Δ 57 : + Δ 15 : + Δ	–45 –88 +12 +44	–77	30 30 → 11 30	**77 × 11 = 847**
26	à flot nul	26 : + Δ 68 : + Δ 28 : – Δ	+14 +12 –33	–7	21 31 → 15	7 × 15 = 105
37	à flot nul	37 : + Δ 47 : – Δ 43 : + Δ	+ 5 –88 +57	–26	→ 13 30 35	26 × 13 = 338
38	à flot nul	38 : + Δ 28 : – Δ 32 : – Δ	+ 8 –33 –69	–94	6 15 → 0	94 × 0 = 0
54	à flot nul			+142		
78	saturé	78 : – Δ 28 : + Δ 32 : + Δ 43 : + Δ 47 : – Δ	–33 +33 +69 +57 –88	+38		

Itération 3. Étape 5. La plus grande diminution possible est associée à l'arc hors base 14. On retranchera Δ = 11 unités du flot transitant par l'arc saturé 14, puis on ajustera le flot sur les arcs de base du cycle de façon à maintenir l'admissibilité de la solution.

Étape 6. La valeur maximale Δ = 11 est associée à l'arc de base 57 : cet arc sera retiré de la base. La solution de base n° 3 résultante est illustrée ci-dessous. Son coût total est z = 6 188 – 847 = 5 341.

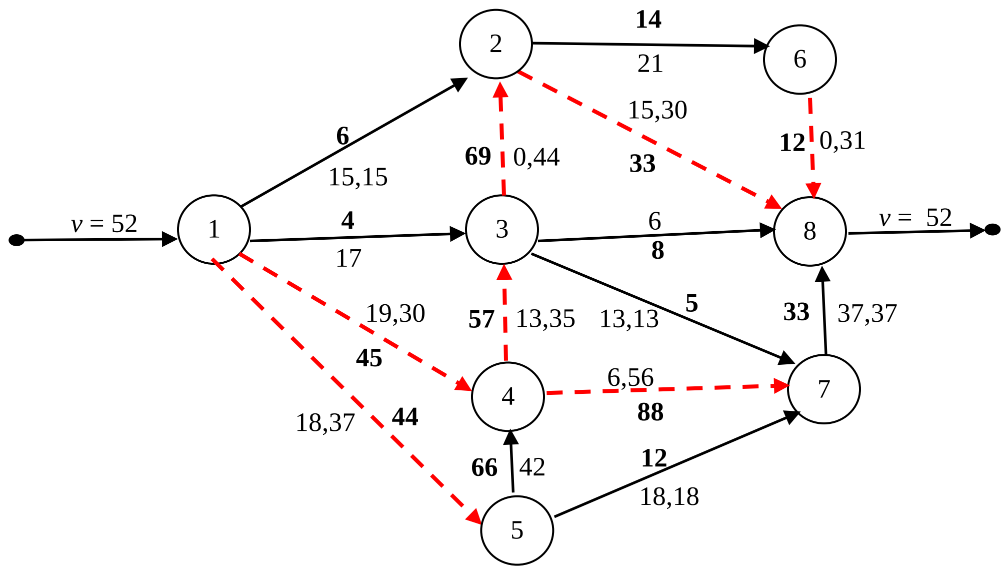


Étapes 3 et 4. Les coûts marginaux de la solution de base nº 3 sont calculés dans le tableau ci-dessous. On constate que plusieurs coûts marginaux sont négatifs : la solution courante n'est donc pas optimale.

Arc hors base	***Statut***	***Cycle***	***Coût unitaire***	***Coût marginal***	***Borne sup. de Δ***	***Diminution***
12	saturé	12 : – Δ 32 : + Δ 43 : + Δ 14 : + Δ	– 6 +69 +57 +45	+165		
13	à flot nul	13 : + Δ 43 : – Δ 14 : – Δ	+ 4 –57 –45	–98	17 → 0 19	98 × 0 = 0
26	à flot nul	26 : + Δ 68 : + Δ 28 : – Δ	+14 +12 –33	–7	21 31 → 15	7 × 15 = 105
37	à flot nul	37 : + Δ 47 : – Δ 43 : + Δ	+ 5 –88 +57	–26	→ 13 19 35	**26 × 13 = 338**
38	à flot nul	38 : + Δ 28 : – Δ 32 : – Δ	+ 8 –33 –69	–94	6 15 → 0	94 × 0 = 0
54	à flot nul	54 : + Δ 14 : – Δ 15 : + Δ	+66 –45 +44	+65		
57	saturé			+77		
78	saturé	78 : – Δ 28 : + Δ 32 : + Δ 43 : + Δ 47 : – Δ	–33 +33 +69 +57 –88	+38		

Itération 4. Étape 5. La plus grande diminution possible est associée à l'arc hors base 37. On ajoutera Δ = 13 unités sur l'arc à flot nul 37, puis on ajustera le flot sur les arcs de base du cycle de façon à maintenir l'admissibilité de la solution. L'arc 37 restera hors base, mais deviendra saturé dans la solution de base

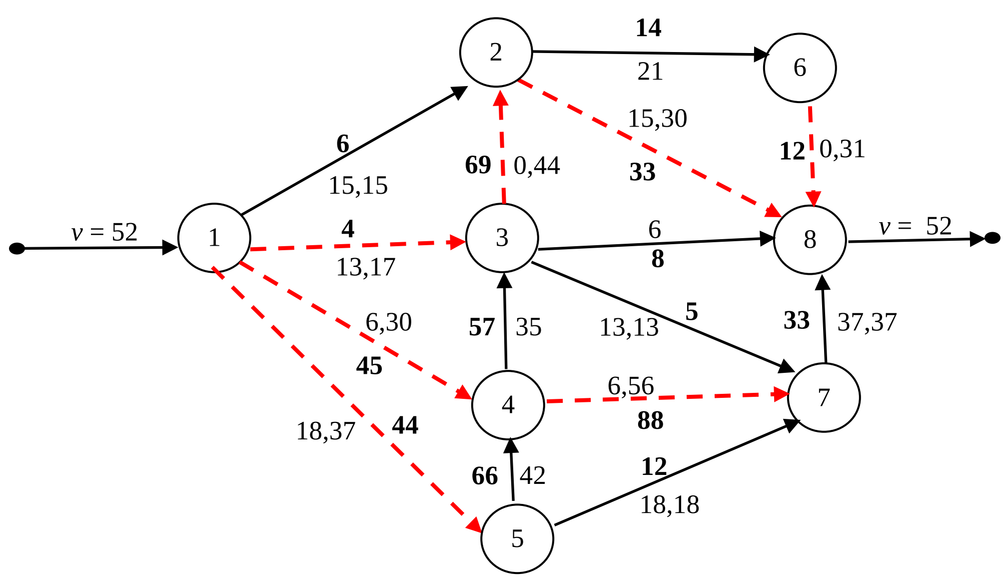
n° 4, qui est illustrée ci-dessous. Le coût total de cette solution n° 4 sera z = 5 341 – 338 = 5 003. Les coûts marginaux restent les mêmes, sauf celui de 37 qui change de signe et devient +26. On passe immédiatement à l'étape 4.



Étape 4. Les coûts marginaux des arcs hors base 26, et 38 sont négatifs : la solution courante n'est donc pas optimale.

Itération 5. Étape 5. Il faut calculer les diminutions | CM_{ij} | × Δ associées aux 3 arcs hors base dont le coût marginal est négatif. Dans chaque cas, le cycle reste le même puisque l'arborescence des arcs de base n'a pas été modifiée. Seules changent les bornes découlant des arcs de base dont la valeur vient d'être modifiée. On vérifie que les bornes supérieures de Δ pour les arcs 13, 26 et 38 sont 13, 15 et 0 respectivement. La plus grande diminution possible est associée à l'arc 13 et est égale à 98 × 13 = 1274. On ajoutera Δ = 13 unités sur l'arc à flot nul 13, puis on ajustera le flot sur les arcs de base du cycle de façon à maintenir l'admissibilité de la solution.

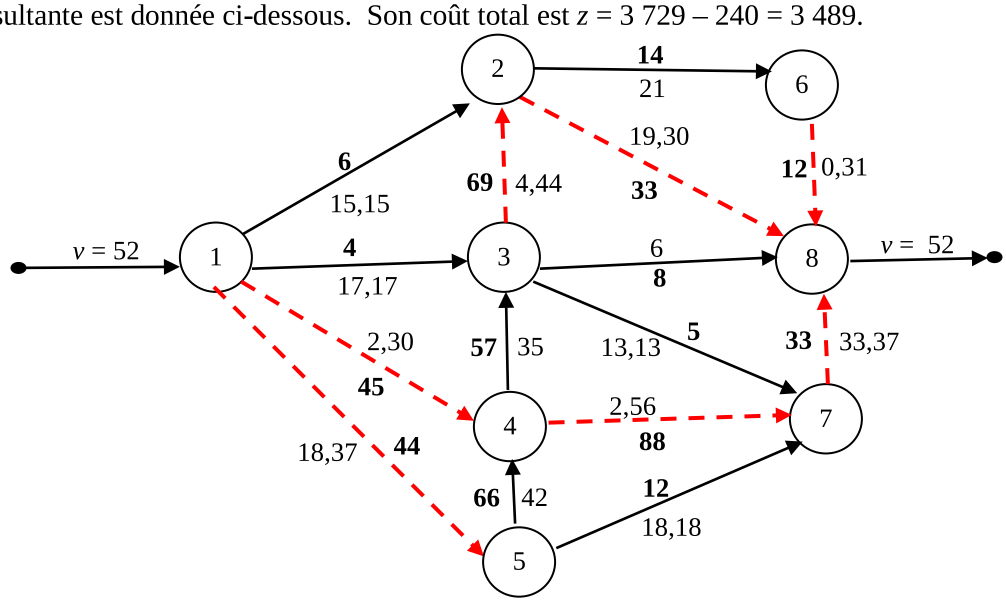
Étape 6. Dans le cycle de l'arc 13 entrant dans la base, la valeur maximale Δ = 13 est associée à l'arc de base 43 : cet arc sera retiré de la base. La solution de base n° 5 résultante est illustrée au haut de la page suivante. Son coût total est z = 5 003 – 1 274 = 3 729.



Étapes 3 et 4. Les coûts marginaux de la solution de base nº 5 sont calculés dans le tableau ci-dessous. On constate que plusieurs coûts marginaux sont négatifs : la solution courante n'est donc pas optimale.

Arc hors base	***Statut***	***Cycle***	***Coût unitaire***	***Coût marginal***	***Borne sup. de Δ***	***Diminution***
12	saturé	12 : – Δ 32 : + Δ 13 : + Δ	– 6 +69 + 4	 +67		
26	à flot nul	26 : + Δ 68 : + Δ 28 : – Δ	+14 +12 –33	 –7	21 31 → 15	 7 × 15 = 105
37	saturé	37 : – Δ 47 : + Δ 14 : + Δ 13 : – Δ	– 5 +88 +45 – 4	 +124		
38	à flot nul	38 : + Δ 28 : – Δ 32 : – Δ	+ 8 –33 –69	 –94	6 15 → 0	 94 × 0 = 0
43	à flot nul			+98		
54	à flot nul	54 : + Δ 14 : – Δ 15 : + Δ	+66 –45 +44	 +65		
57	saturé	57 : – Δ 47 : + Δ 14 : + Δ 15 : – Δ	–12 +88 +45 –44	 +77		
78	saturé	78 : – Δ 28 : + Δ 32 : + Δ 13 : + Δ 14 : – Δ 47 : – Δ	–33 +33 +69 + 4 –45 –88	 –60	37 15 44 → 4 6 6	 **60 × 4 = 240**

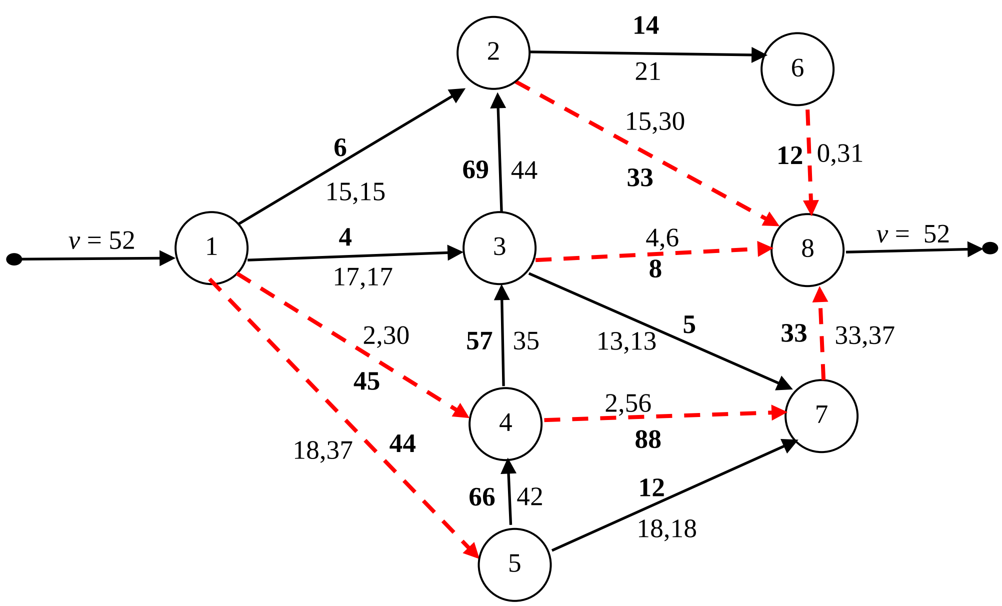
Itération 6. Étapes 5 et 6. La plus grande diminution possible est associée à l'arc hors base 78. On retranchera Δ = 4 unités du flot transitant par l'arc saturé 78, puis on ajustera le flot sur les arcs de base du cycle de façon à maintenir l'admissibilité de la solution. L'arc 13 sortira de la base. La solution de base nº 6 résultante est donnée ci-dessous. Son coût total est z = 3 729 – 240 = 3 489.



Étapes 3 et 4. Les coûts marginaux de la solution de base n° 6 sont calculés dans le tableau ci-dessous (les calculs pour 54 et 57 sont identiques à ceux du tableau précédent et ne sont pas répétés). On constate que plusieurs coûts marginaux sont négatifs : la solution courante n'est donc pas optimale.

Arc hors base	***Statut***	***Cycle***	***Coût unitaire***	***Coût marginal***	***Borne sup. de Δ***	***Diminution***
12	saturé	12 : – Δ 28 : – Δ 78 : + Δ 47 : + Δ 14 : + Δ	– 6 –33 +33 +88 +45	+127		
13	saturé			+60		
26	à flot nul	26 : + Δ 68 : + Δ 28 : – Δ	+14 +12 –33	–7	21 31 → 19	7 × 19 = 133
37	saturé	37 : – Δ 78 : – Δ 28 : + Δ 32 : + Δ	– 5 –33 +33 +69	+64		
38	à flot nul	38 : + Δ 28 : – Δ 32 : – Δ	+ 8 –33 –69	–94	6 19 → 4	**94 × 4 = 376**
43	à flot nul	43 : + Δ 32 : + Δ 28 : + Δ 78 : – Δ 47 : – Δ	+57 +69 +33 –33 –88	+38		
54	à flot nul			+65		
57	saturé			+77		

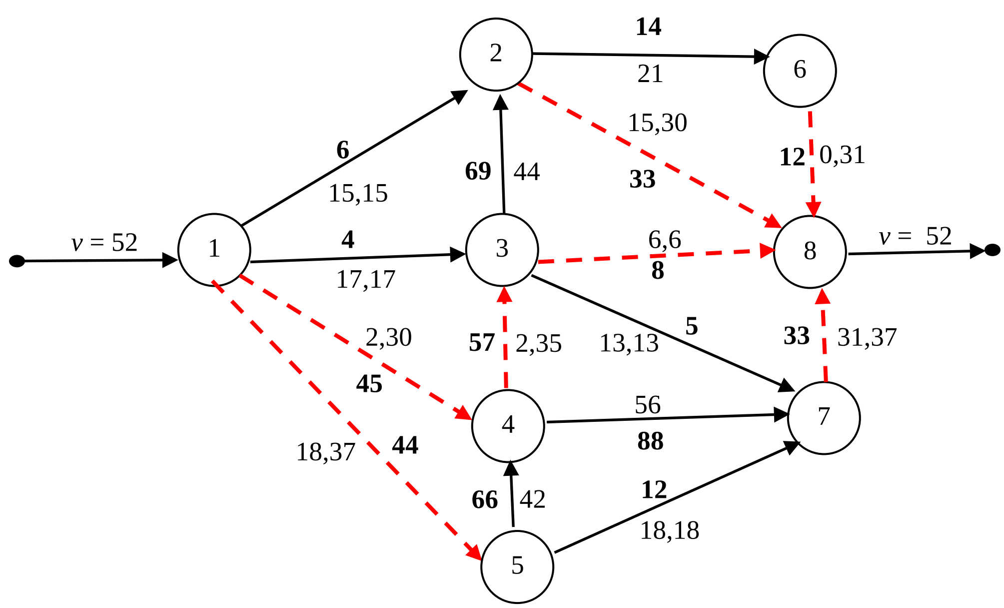
Itération 7. Étapes 5 et 6. La plus grande diminution possible est associée à l'arc hors base 38. On ajoutera Δ = 4 unités sur l'arc à flot nul 38, puis on ajustera le flot sur les arcs de base du cycle de façon à maintenir l'admissibilité de la solution. L'arc 32 sortira de la base. La solution de base n° 7 résultante est donnée ci-dessous. Son coût total est z = 3 489 – 376 = 3 113.



Étapes 3 et 4. Les coûts marginaux de la solution de base nº 7 sont calculés dans le tableau ci-dessous (les calculs pour 12, 54 et 57 sont identiques à ceux du tableau précédent et ne sont pas répétés). On constate que plusieurs coûts marginaux sont négatifs : la solution courante n'est donc pas optimale.

Arc hors base	***Statut***	***Cycle***	***Coût unitaire***	***Coût marginal***	***Borne sup. de Δ***	***Diminution***
12	saturé			+127		
13	saturé	13 : – Δ 38 : – Δ 78 : + Δ 47 : + Δ 14 : + Δ	– 4 – 8 +33 +88 +45	+154		
26	à flot nul	26 : + Δ 68 : + Δ 28 : – Δ	+14 +12 –33	–7	21 31 → 15	7 × 15 = 105
32	à flot nul			+94		
37	saturé	37 : – Δ 78 : – Δ 38 : + Δ	– 5 –33 + 8	–30	21 31 → 2	30 × 2 = 60
43	à flot nul	43 : + Δ 38 : + Δ 78 : – Δ 47 : + Δ	+57 + 8 –33 –88	–56	35 2 33 → 2	**56 × 2 = 112**
54	à flot nul			+65		
57	saturé			+77		

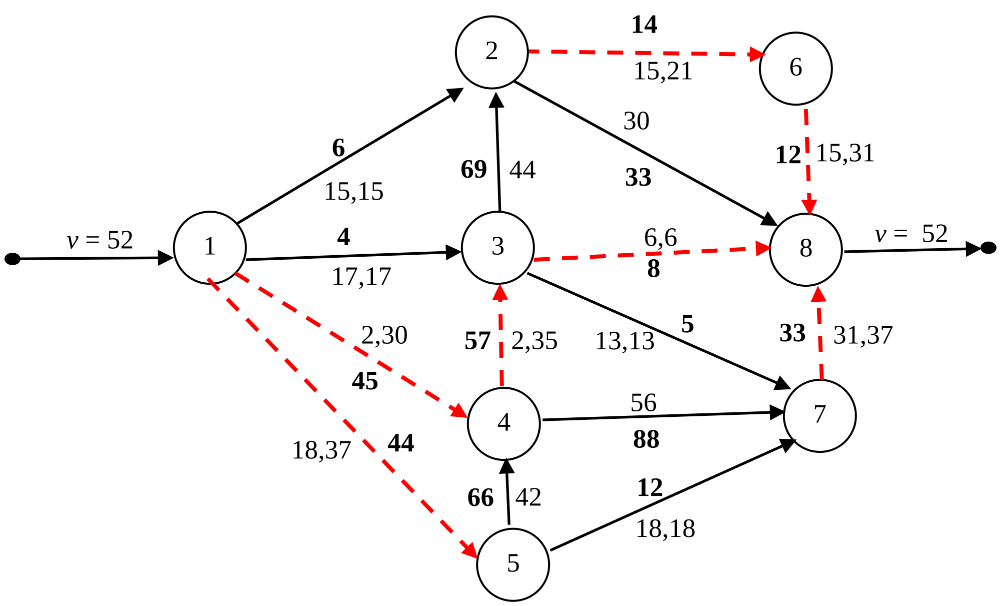
Itération 8. Étapes 5 et 6. La plus grande diminution possible est associée à l'arc hors base 43. On ajoutera Δ = 2 unités sur l'arc à flot nul 43, puis on ajustera le flot sur les arcs de base du cycle de façon à maintenir l'admissibilité de la solution. L'arc 47 sortira de la base. La solution de base nº 8 résultante est donnée ci-dessous. Son coût total est z = 3 113 – 112 = 3 001.



Étapes 3 et 4. Les coûts marginaux de la solution de base nº 8 sont calculés dans le tableau ci-dessous (les calculs pour 32 et 54 sont identiques à ceux du tableau précédent et ne sont pas répétés; ceux de 12 ont été omis pour alléger). On constate que certains coûts marginaux sont négatifs : la solution courante n'est donc pas optimale.

Arc hors base	*Statut*	*Cycle*	*Coût unitaire*	*Coût marginal*	*Borne sup. de Δ*	*Diminution*
12	saturé			+71		
13	saturé	13 : – Δ 43 : + Δ 14 : + Δ	– 4 +57 +45	+98		
26	à flot nul	26 : + Δ 68 : + Δ 28 : – Δ	+14 +12 –33	–7	21 31 → 15	**7 × 15 = 105**
32	à flot nul			+94		
37	saturé	37 : – Δ 78 : – Δ 38 : + Δ	– 5 –33 + 8	–30	13 31 → 0	30 × 0 = 0
47	à flot nul			+56		
54	à flot nul			+65		
57	saturé	57 : – Δ 78 : – Δ 38 : + Δ 43 : + Δ 14 : + Δ 15 : – Δ	–12 –33 + 8 +57 +45 –44	+21		

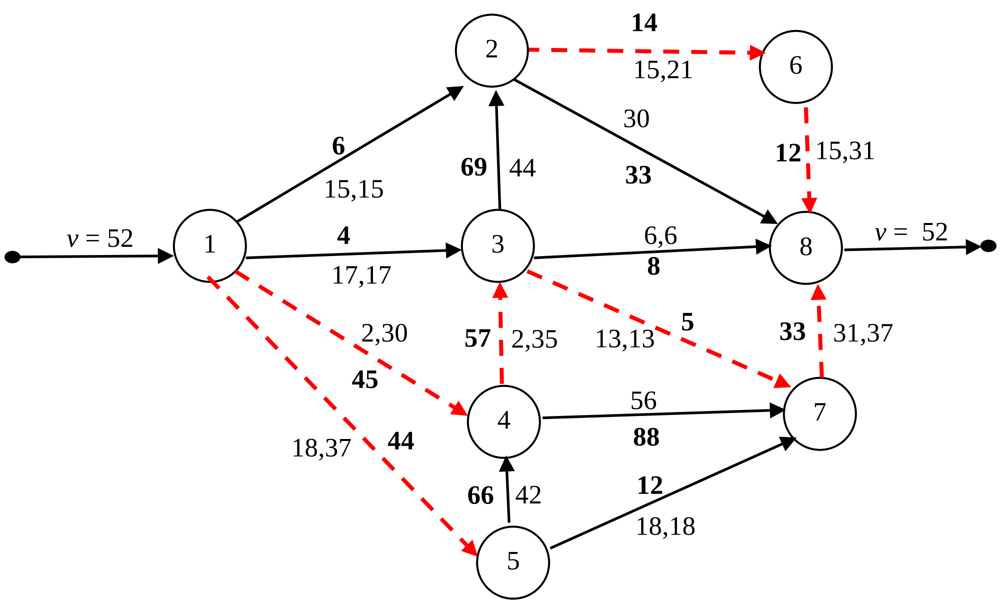
Itération 9. Étapes 5 et 6. La plus grande diminution possible est associée à l'arc hors base 26. On ajoutera Δ = 15 unités sur l'arc à flot nul 26, puis on ajustera le flot sur les arcs de base du cycle de façon à maintenir l'admissibilité de la solution. L'arc 28 sortira de la base. La solution de base nº 9 résultante est donnée ci-dessous. Son coût total est z = 3 001 – 105 = 2 896.



Étapes 3 et 4. Les coûts marginaux de la solution de base nº 9 sont calculés dans le tableau ci-dessous (les calculs pour 13, 54 et 57 sont identiques à ceux du tableau précédent et ne sont pas répétés). On constate que le coût marginal de l'arc hors base 37 est négatif. On continue.

Arc hors base	*Statut*	*Cycle*	*Coût unitaire*	*Coût marginal*	*Borne sup. de Δ*	*Diminution*
12	saturé	12 : – Δ 26 : – Δ 68 : – Δ 38 : + Δ 43 : + Δ 14 : + Δ	– 6 –14 –12 + 8 +57 +45	+78		
13	saturé			+98		
28	à flot nul			+7		
32	à flot nul	32 : + Δ 26 : + Δ 68 : + Δ 38 : – Δ	+69 +14 +12 – 8	+87		
37	saturé	37 : – Δ 78 : – Δ 38 : + Δ	– 5 –33 + 8	–30	13 31 → 0	**30 × 0 = 0**
47	à flot nul	47 : + Δ 78 : + Δ 38 : – Δ 43 : – Δ	+88 +33 – 8 –57	+56 +56		
54	à flot nul			+65		
57	saturé			+21		

Itération 10. Étapes 5 et 6. Le seul arc hors base dont le coût marginal est négatif est 37 et il admet 0 comme limite. On «ajoutera» Δ = 0 unité sur cet arc, puis on «ajustera» le flot sur les arcs de base du cycle. L'arc 38 sortira de la base. La solution de base n° 10 résultante est donnée ci-dessous : le flot sur tout arc est le même que dans la solution précédente, mais l'arc 37 est maintenant dans l'arborescence tandis que 38 est hors base. Le coût total de cette solution n° 10 est z = 2 896 – 0 = 2 896.



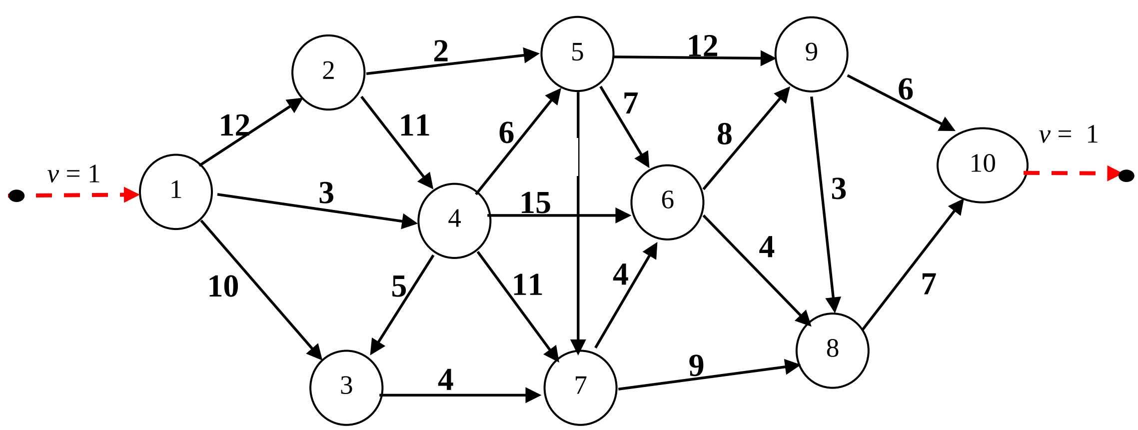
Étapes 3 et 4. Les coûts marginaux de la solution de base n° 10 sont calculés dans le tableau ci-dessous (les calculs pour 13, 28 et 54 sont identiques à ceux du tableau précédent et ne sont pas répétés; ceux de 12 ont été omis pour alléger). On constate qu'aucun coût marginal n'est négatif. La solution de base n° 10 est donc optimale.

Arc hors base	**Statut**	**Cycle**	**Coût unitaire**	**Coût marginal**	**Borne sup. de Δ**	**Diminution**
12	saturé			+108		
13	saturé			+98		
28	à flot nul			+7		
32	à flot nul	32 : + Δ 26 : + Δ 68 : + Δ 78 : – Δ 37 : – Δ	+69 +14 +12 –33 – 8	+57		
38	saturé			+30		
47	à flot nul	47 : + Δ 37 : – Δ 43 : – Δ	+88 – 5 –57	+26		
54	à flot nul			+65		
57	saturé	57 : – Δ 73 : + Δ 43 : + Δ 14 : + Δ 15 : – Δ	–12 + 5 +57 +45 –44	+51		

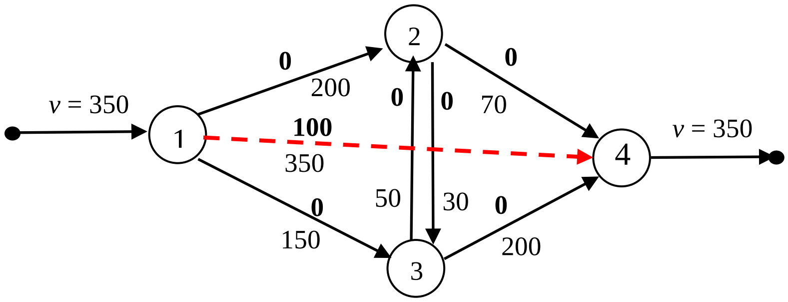
7. Cas particuliers de PFCM

(a) Le problème de trouver un CLPC du sommet *i* au sommet *j* se ramène au PFCM dans le réseau obtenu en considérant les sommets *i* et *j* comme la source et le puits respectivement et en fixant à 1 unité le flot *v* émis par la source et reçu par le puits. Le coût unitaire sur un arc *ij* sera la longueur de cet arc; il n'est pas nécessaire de spécifier de borne supérieure, mais on peut prendre 1 comme borne supérieure de tout arc du réseau.

La figure ci-dessous décrit le PCFM représentant le problème de trouver un CLPC de 1 à 10 dans l'exemple de base traité au chapitre 4 (voir la figure 4.7 de la page 152). Les bornes supérieures sont omises pour alléger la figure.



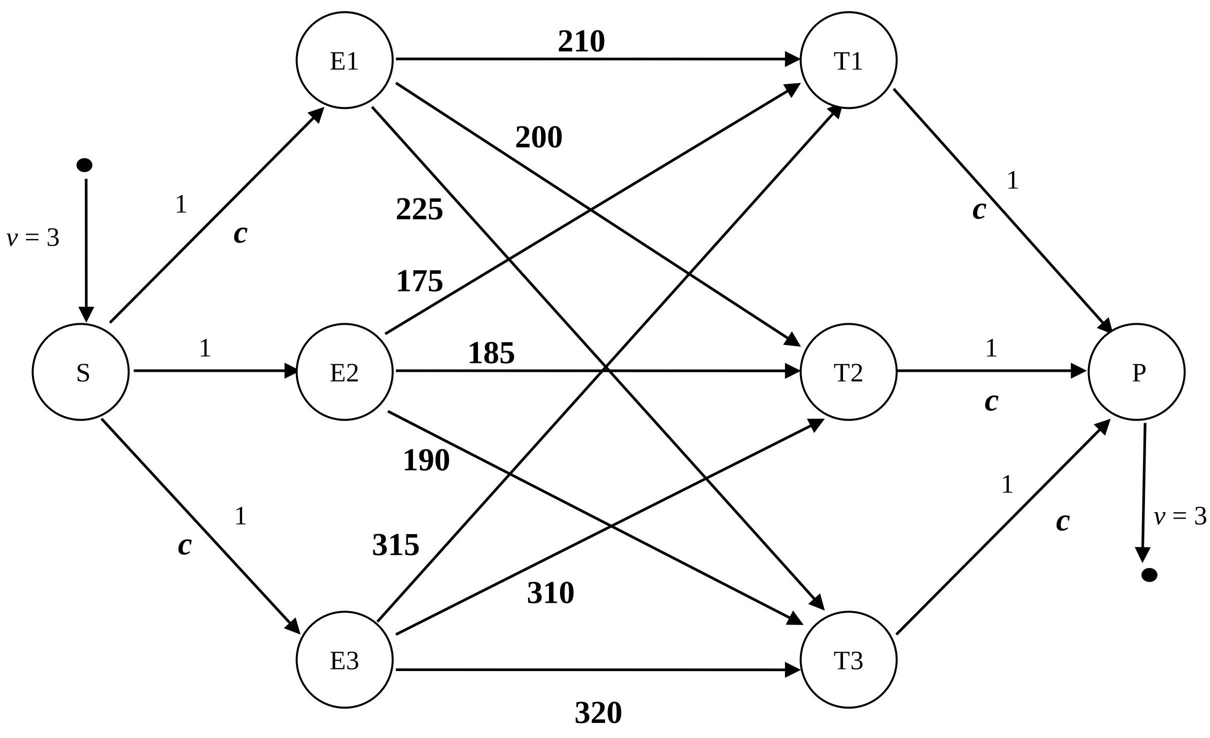
(b) La figure ci-dessous donne un PCFM représentant le problème de flot maximal dans le mini-réseau du chapitre 5 (voir la figure 5.5 de la page 196). Le flot émis par la source et reçu par le puits dans le PFCM est égal à la somme 200 + 150 = 350 des bornes supérieures sur les différents arcs qui émergent de la source. L'arc 14 ajouté servira à convoyer celles des 350 unités qui ne pourraient transiter par le réseau originel ; le coût unitaire élevé reporté sur 14 pénalise fortement le passage par cet arc et détournera le plus d'unités possibles par le réseau originel.



Notes. Le flot v dans le PFCM pourrait aussi être posé égal à la somme 70 + 200 = 270 des bornes sur les arcs admettant le puits comme sommet terminal. Dans la définition des PFCM, nous avons exigé que les coûts unitaires c_{ij} associés aux différents arcs soient positifs – ce qui exclut la valeur 0 utilisée dans le réseau ci-dessus. Pour être rigoureux et respecter à la lettre la définition des PFCM, il faudrait remplacer les coûts nuls par un coût unitaire c faible – la valeur c = 1 ferait l'affaire dans l'exemple traité ici.

8. PFCM et le problème d'affectation

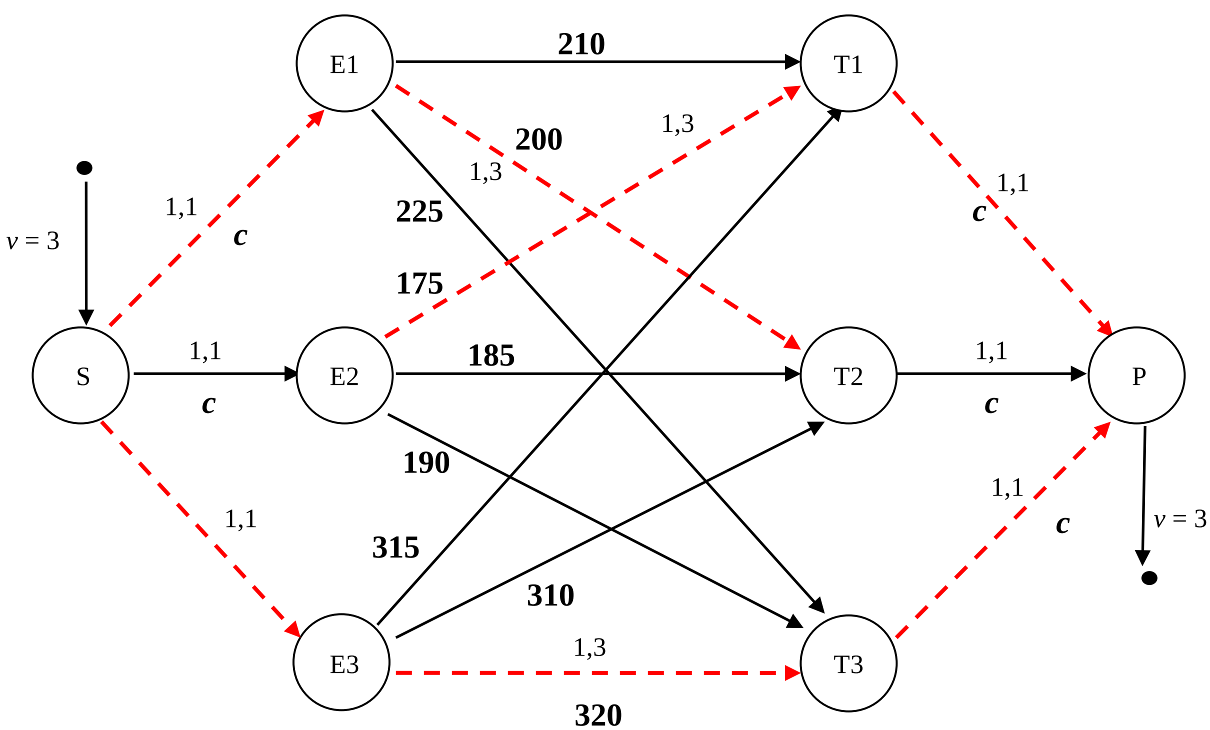
(a) La figure ci-dessous donne un PCFM représentant ce problème d'affectation. On supposera que tous les arcs de la forme Ei → Tj ont une capacité de 3, qui n'est pas indiquée explicitement dans la figure. Ces arcs ne seront jamais saturés; ils seront automatiquement flottants dès qu'ils recevront une quantité non nulle de flot.



Note. D'après le contexte, la borne sur les arcs de la forme Ei → Tj devrait être égale à 1 et les coûts unitaires sur les six autres arcs devraient être nuls. Mais, dans la définition des PFCM, nous avons exigé que les coûts unitaires c_{ij} associés aux différents arcs soient positifs – ce qui exclut la valeur 0 ; de plus, la solution optimale du PFCM est indépendante de la valeur du coût unitaire reporté sur les six arcs de la forme S → Ei ou Tj → P, car le flot sur chacun de ces arcs sera nécessairement égal à 1 unité dans toute solution admissible du PFCM considéré ici, de sorte que la contribution de ces arcs à la valeur de z sera nécessairement égale la somme des coûts unitaires reportés sur ces arcs. Le choix d'une borne supérieure à 1 pour les arcs de la forme Ei → Tj garantit que ces arcs seront automatiquement flottants dès qu'ils recevront une quantité non nulle de flot, ce qui facilitera la résolution du PFCM.

(b) Nous appliquons maintenant l'algorithme du simplexe réseau au PFCM construit à la question précédente.

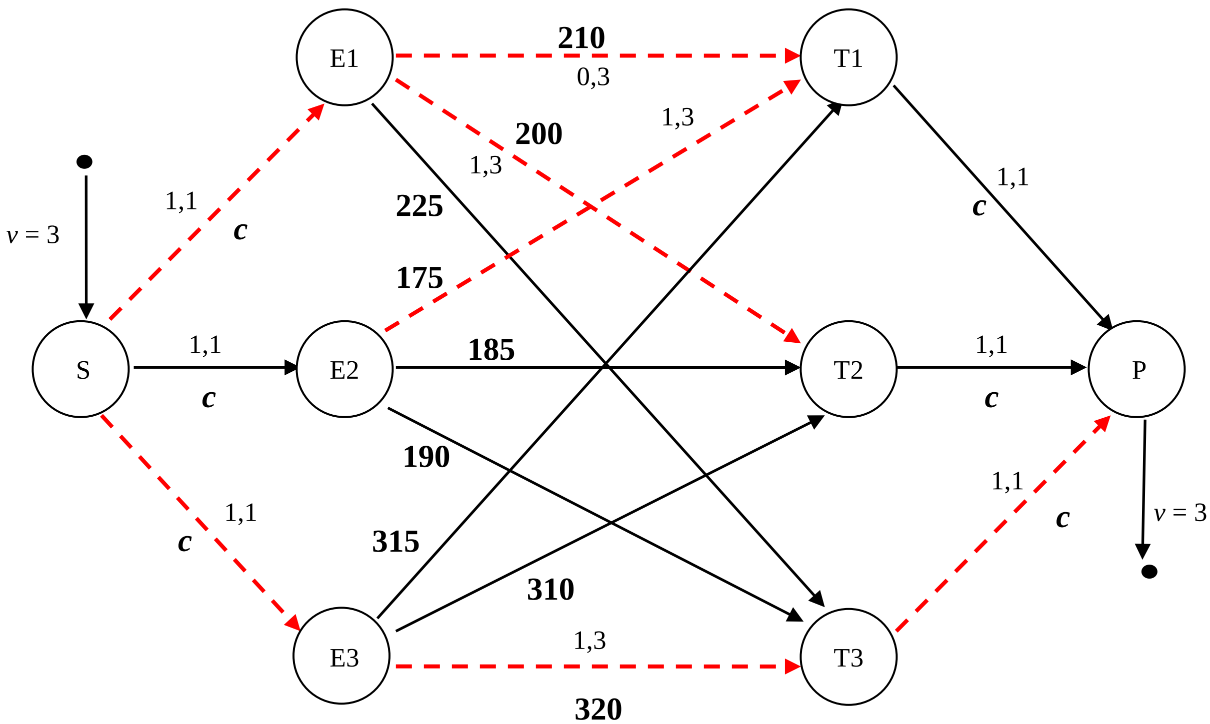
- **Initialisation (itération 0). Étape 0** (construction d'une solution admissible). Nous utilisons une approche gourmande pour construire des chemins de S à P de coût unitaire aussi faible que possible : nous attribuons donc 1 unité aux chemins S → E2 → T1 → P, S → E1 → T2 → P et S → E3 → T3 → P. Le coût total de cette solution est $z = 175 + 200 + 320 = 695$.
- **Initialisation (itération 0). Étape 1** (construction d'une solution admissible sans cycle d'arcs flottants). La solution obtenue lors de l'étape 0 ne contient aucun cycle d'arcs flottants.
- **Initialisation (itération 0). Étape 2** (construction d'une solution admissible de base). Les trois arcs de la forme Ei → Tj qui apparaissent dans les chemins de l'étape 0 convoient un flot non nul et sont flottants ; ils font automatiquement partie de l'arborescence des arcs de base. Il s'agit des arcs E1 → T1, E1 → T2 et E3 → T3. Comme l'arborescence doit contenir $n - 1 = 7$ arcs, il en faut quatre autres : convenons d'ajouter les arcs S → E1, S → E3, T1 → P et T3 → P. La solution de base résultante, qui sera la solution de base n° 0, est reproduite ci-dessous (les valeurs du flot sur les arcs hors base de la forme Ei → Tj, de même que leurs bornes supérieures, ne sont pas explicitées).



- **Initialisation (itération 0). Étape 3** (calcul des coûts marginaux). Le tableau de la page suivante donne les coûts marginaux des arcs hors base.
- **Initialisation (itération 0). Étape 4** (test d'optimalité). Plusieurs coûts marginaux sont négatifs. Il faut donc effectuer une itération supplémentaire.
- **Itération 1. Étape 5**. Dans les trois cas où le coût marginal est négatif, la diminution est nulle. On choisira d'incorporer dans la base celui des trois candidats dont le coût marginal est le plus élevé en valeur absolue, soit l'arc E1 → T1. Comme la valeur maximale de Δ est nulle, il n'y a aucun ajustement à faire sur les arcs de base du cycle associé à l'arc E1 → T1.

- **Itération 1. Étape 6**. La borne supérieure Δ = 0 est associée à deux arcs du cycle, soit les arcs de base T1 → P et S → E1. On choisit de retirer l'arc T1 → P de la base. La solution de base résultante est reproduite ci-dessous, après le tableau de calcul des coûts marginaux (les valeurs du flot sur les arcs hors base de la forme Ei → Tj, de même que leurs bornes supérieures, ne sont pas explicitées). Le coût total de la nouvelle solution est $z = 695 - 0 = 695$.

Arc hors base	***Statut***	***Cycle***	***Coût unitaire***	***Coût marginal***	***Borne sup. de Δ***	***Diminution***
S → E2	saturé	S → E2 E2 → T1 T1 → P P ← T3 T3 ← E3 E3 ← S	$-\ c$ –175 $-\ c$ $+\ c$ +320 $+\ c$	+145		
T2 → P	saturé	T2 → P P ← T3 T3 ← E3 E3 ← S S → E1 E1 → T2	$-\ c$ $+\ c$ +320 $+\ c$ $-\ c$ –200	+120		
E1 → T1	à flot nul	E1 → T1 T1 → P P ← T3 T3 ← E3 E3 ← S S → E1	+210 $+\ c$ $-\ c$ –320 $-\ c$ $+\ c$	–110	3 → **0** 1 1 1 → 0	**110 × 0 = 0**
E1 → T3	à flot nul	E1 → T3 T3 ← E3 E3 ← S S → E1	+225 –320 $-\ c$ $+\ c$	– 95	3 1 1 → 0	95 × 0 = 0
E2 → T2	à flot nul	E2 → T2 T2 ← E1 E1 ← S S → E3 E3 → T3 T3 → P P ← T1 T1 ← E2	+185 –200 $-\ c$ $+\ c$ +320 $+\ c$ $-\ c$ –175	+130		
E2 → T3	à flot nul	E2 → T3 T3 → P P ← T1 T1 ← E2	+190 $+\ c$ $-\ c$ –175	+15		
E3 → T1	à flot nul	E3 → T1 T1 → P P ← T3 T3 ← E3	+315 $+\ c$ $-\ c$ –320	– 5	3 0 1 1	5 × 0 = 0
E3 → T2	à flot nul	E3 → T2 T2 ← E1 E1 ← S S → E3	+310 –200 $-\ c$ $+\ c$	+110		



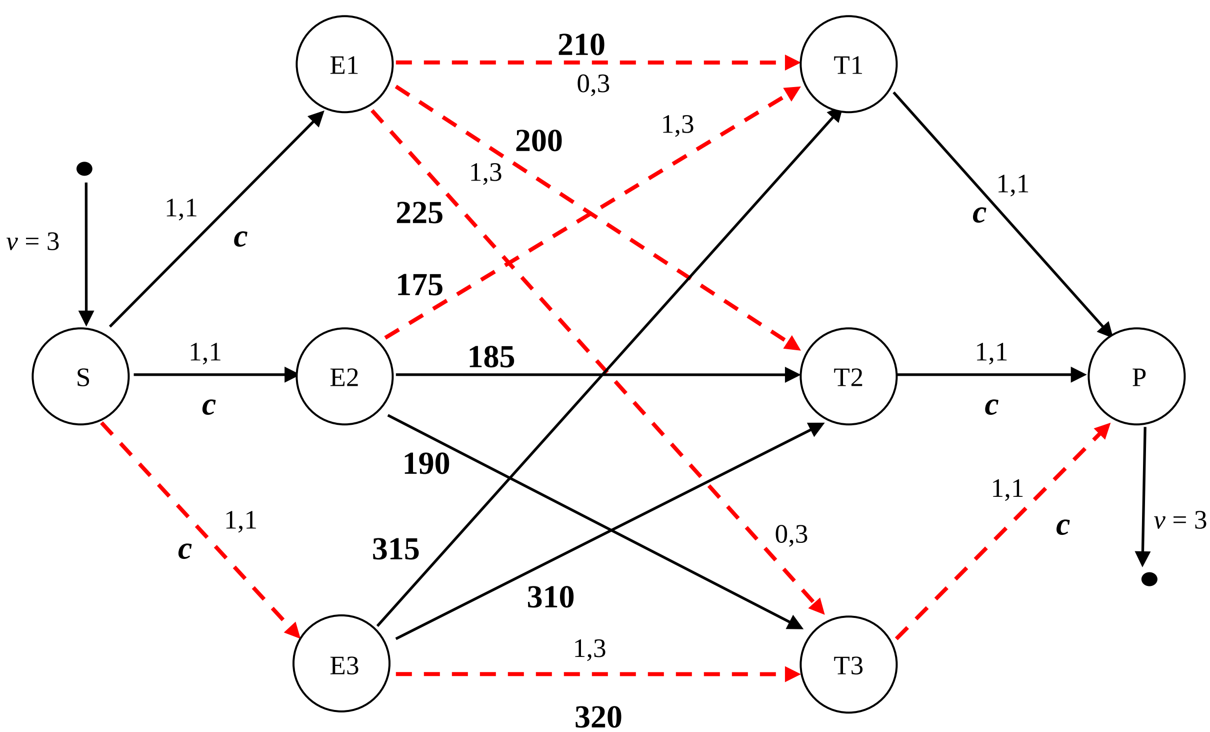
- **Itération 1. Étape 3**. Le tableau ci-dessous donne les coûts marginaux des arcs hors base (les calculs pour T2 → P, E1 → T3 et E3 → T2 sont identiques à ceux du tableau précédent et ne sont pas répétés; ceux pour E3 → T1 ont été omis pour alléger).

Arc hors base	*Statut*	*Cycle*	*Coût unitaire*	*Coût marginal*	*Borne sup. de Δ*	*Diminution*
S → E2	saturé	S → E2 E2 → T1 T3 ← E1 E1 ← S	− *c* –175 +210 + *c*	+ 35		
T1 → P	saturé			+110		
T2 → P	saturé			+120		
E1 → T3	à flot nul			− 95		**95 × 0 = 0**
E2 → T2	à flot nul	E2 → T2 T2 ← E1 E1 → T1 T1 ← E2	+185 –200 +210 –175	+ 20		
E2 → T3	à flot nul	E2 → T3 T3 ← E3 E3 ← S S → E1 E1 → T1 T1 ← E2	+190 –320 − *c* + *c* +210 –175	− 95	3 1 1 → **0** 3 1	95 × 0 = 0
E3 → T1	à flot nul			+105		
E3 → T2	à flot nul			+110		

- **Itération 1. Étape 4**. Certains coûts marginaux du tableau précédent sont négatifs. Il faut donc effectuer une autre itération.

- **Itération 2. Étape 5**. Dans les deux cas où le coût marginal est négatif, la diminution est nulle. On choisit d'incorporer l'arc E1 → T3 dans la base. Comme la valeur maximale de Δ est nulle, il n'y a aucun ajustement à faire sur les arcs de base du cycle associé à l'arc E1 → T3.

- **Itération 2. Étape 6**. On retire l'arc S → E1 de la base. La solution de base résultante est reproduite ci-dessous (les valeurs du flot sur les arcs hors base de la forme E*i* → T*j*, de même que leurs bornes supérieures, ne sont pas explicitées). Le coût total de la nouvelle solution est $z = 695 - 0 = 695$.



- **Itération 2. Étape 3**. Le tableau de la page suivante donne les coûts marginaux des arcs hors base.

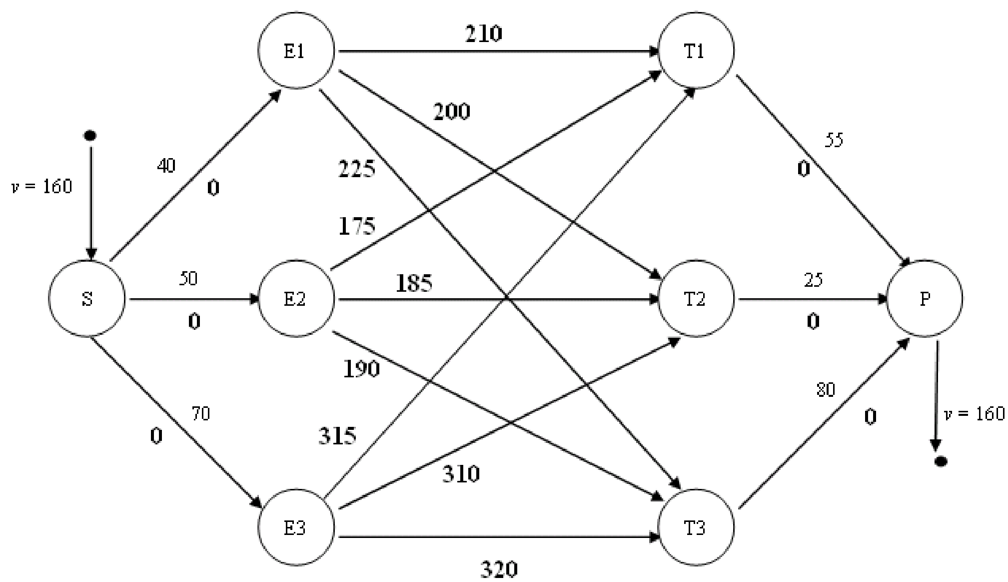
- **Itération 2. Étape 4**. Aucun coût marginal n'est négatif. Par conséquent, la solution de base courante est optimale.

On minimise le coût d'exécution des trois tâches en affectant l'employé E1 à la tâche T2, l'employé E2 à la tâche T1 et l'employé E3 à la tâche T3. Le coût total sera de 695 $ par jour.

Arc hors base	***Statut***	***Cycle***	***Coût unitaire***	***Coût marginal***	***Borne sup. de Δ***	***Diminution***
S → E1	saturé			+ 95		
S → E2	saturé	S → E2 E2 → T1 T1 ← E1 E1 → T3 T3 ← E3 E3 ← S	– *c* –175 +210 –225 +320 + *c*	+130		
T1 → P	saturé	T1 → P P ← T3 T3 ← E1 E1 → T1	– *c* + *c* +225 –210	+ 15		
T2 → P	saturé	T2 → P P ← T3 T3 ← E1 E1 → T2	– *c* + *c* +225 –200	+ 25		
E2 → T2	à flot nul	E2 → T2 T2 ← E1 E1 → T1 T1 ← E2	+185 –200 +210 –175	+ 20		
E2 → T3	à flot nul	E2 → T3 T3 ← E1 E1 → T1 T1 ← E2	+190 –225 +210 –175	0		
E3 → T1	à flot nul	E3 → T1 T1 ← E1 E1 → T3 T3 ← E3	+315 –210 +225 –320	+ 10		
E3 → T2	à flot nul	E3 → T2 T2 ← E1 E1 → T3 T3 ← E3	+310 –200 +225 –320	+ 15		

9. PFCM et le problème de transport classique

(a) La figure ci-dessous donne un PCFM représentant ce problème de transport classique. On supposera que tous les arcs de la forme Ei → Tj ont une capacité de 160, qui n'est pas indiquée explicitement dans la figure. Ces arcs ne seront jamais saturés; ils seront automatiquement flottants dès qu'ils recevront une quantité non nulle de flot.



Note. Dans la définition des PFCM, nous avons exigé que les coûts unitaires c_{ij} associés aux différents arcs soient positifs – ce qui exclut la valeur 0 utilisée dans le réseau ci-dessus. Pour être rigoureux et respecter à la lettre la définition des PFCM, il suffirait de remplacer tous les coût nuls par un même coût unitaire positif c. En effet, le flot total sur les arcs source S → E1, S → E2 et S → E3 sera nécessairement égal à 160 unités dans toute solution admissible du PFCM considéré ici; de même, le flot total sur les arcs puits T1 → P, T2 → P et T3 → P sera de 160 unités; par conséquent, la contribution de ces six arcs à la valeur de z sera nécessairement égale à $2 \times 160c = 320c$.

(b) Nous appliquons maintenant l'algorithme du simplexe réseau au PFCM construit à la question précédente.

- Étape 0 (construction d'une solution admissible). Nous utilisons une approche gourmande pour construire des chemins de S à P de coût unitaire aussi faible que possible :

  S → E2 → T1 → P : 50 unités

  S → E1 → T2 → P : 25 unités

  S → E1 → T1 → P : 5 unités

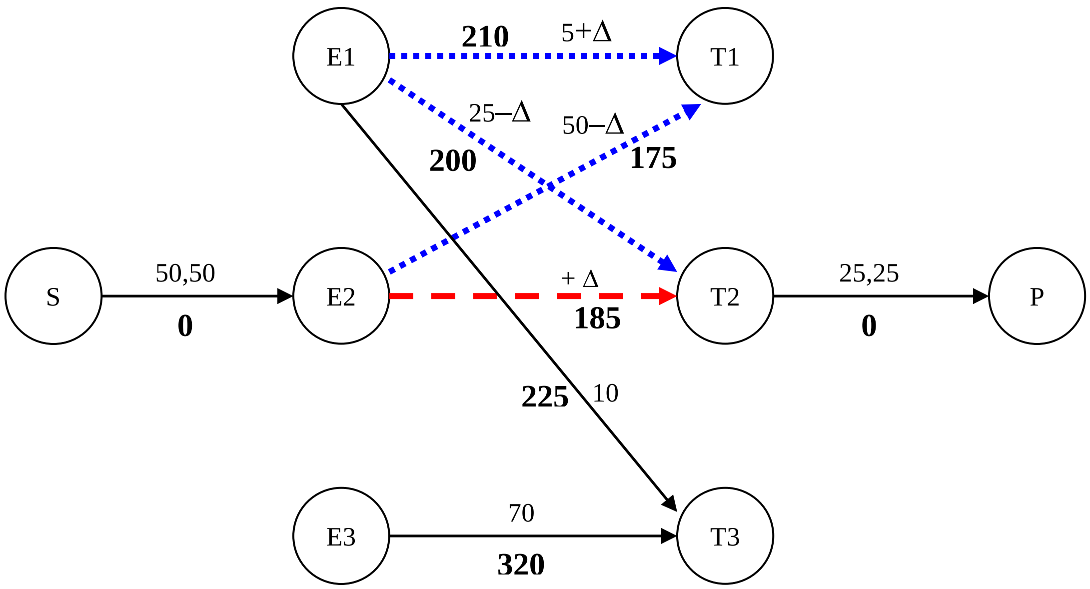
  S → E1 → T3 → P : 10 unités

  S → E3 → T3 → P : 70 unités.

- Étape 1 (construction d'une solution admissible sans cycle d'arcs flottants). La solution obtenue lors de l'étape 0 ne contient aucun cycle d'arcs flottants.

- Étape 2 (construction d'une solution admissible de base). Les cinq arcs de la forme Ei → Tj qui apparaissent dans les chemins de l'étape 0 convoient un flot non nul et sont flottants ; ils font automatiquement partie de l'arborescence des arcs de base. Il s'agit des arcs E1 → T1, E1 →

T2, E1 → T3, E2 → T1 et E3 → T3. Comme l'arborescence doit contenir n – 1 = 7 arcs, il en faut deux autres : convenons d'ajouter les arcs S → E2 et T2 → P. La figure ci-dessous donne l'arborescence résultante : les arcs noirs ou bleus font partie de la base; l'arc rouge E2 → T2 est hors base et le cycle induit par son ajout est formé de E2 → T2 et des arcs de base bleus (en pointillé) ; ce cycle sera utilisé lors de l'étape suivante pour le calcul du coût marginal de l'ars hors base E2 → T2.



- Étape 3 (calcul des coûts marginaux). Le tableau de la page suivante donne les coûts marginaux des arcs hors base de la forme Ei → Tj.
- Étape 4 (test d'optimalité). Tous les arcs hors base de la forme Ei → Tj ont un coût marginal non négatif. De plus, le calcul des coûts marginaux de ces arcs ne fait en aucun cas appel à des arcs source ou à des arcs puits. Les coûts marginaux seraient donc identiques même si les arcs source ou puits choisis pour compléter l'arborescence étaient différents. Comme les arcs source ou puits doivent être saturés dans toute solution admissible de ce PFCM, on peut conclure à l'optimalité de la solution présente sans tenir compte des coûts marginaux des arcs source ou puits qui sont hors base.

La valeur optimale du PFCM est

$$z^* = (5\times210) + (25\times200) + \ldots + (70\times320) = 39\ 630.$$

Le tableau suivant décrit un plan optimal de transport des 160 VTT.

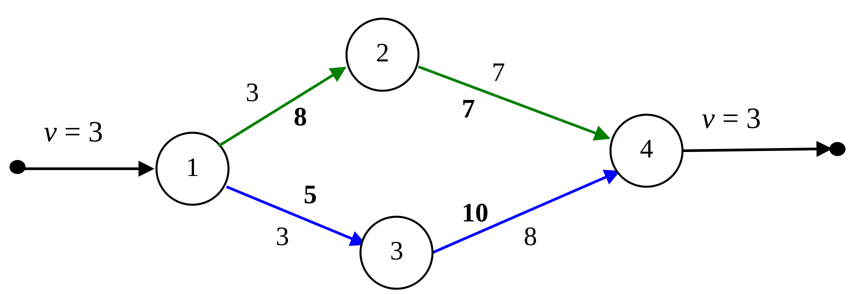
	T1	**T2**	**T3**	**Total**
E1	5	25	10	40
E2	50	-	-	50
E3	-	-	70	70
Total	55	25	80	160

Arc hors base	**Statut**	**Cycle**	**Coût unitaire**	**Coût marginal**
E2 → T2	à flot nul	E2 → T2	+ 185	
		T2 ← E1	− 200	
		E1 → T1	+ 210	
		T1 ← E2	− 175	+ 20
E2 → T3	à flot nul	E2 → T3	+ 190	
		T3 ← E1	− 225	
		E1 → T1	+ 210	
		T1 ← E2	− 175	0
E3 → T1	à flot nul	E3 → T1	+ 315	
		T1 ← E1	− 210	
		E1 → T3	+ 225	
		T3 ← E3	− 320	+ 10
E3 → T2	à flot nul	E3 → T2	+ 310	
		T2 ← E1	− 200	
		E1 → T3	+ 225	
		T3 ← E3	− 320	+ 15

10. Le PFCM, de a jusqu'à z

(a) Vrai : il suffit, par exemple, d'exiger que le flot v émis par la source 1 dépasse la capacité totale de tous les arcs admettant 1 comme sommet initial.

(b) Faux. Par exemple, le PFCM ci-dessous admet plusieurs solutions optimales : dans l'une, les 3 unités de flot passent par le chemin 1 → 2 → 4; dans une autre, elles passent toutes par le chemin 1 → 3 → 4.



(c) Vrai : l'arborescence des arcs de base contient exactement $n-1$ arcs et tous les arcs flottants appartiennent à cette arborescence.

(d) Faux : une solution de base optimale dégénérée comportera moins de $n-1$ arcs flottants. À titre d'exemple, reprenons le PFCM considéré en question (b) et considérons la solution de base optimale pour laquelle $1 \rightarrow 3$ est l'unique arc hors base et convoie 0 unité : dans cette solution, le flot sur l'arc $3 \rightarrow 4$ est nul, l'arc $1 \rightarrow 2$ est saturé, tandis que l'arc $2 \rightarrow 4$ est l'unique arc flottant.

(e) Faux : l'exemple de la question précédente illustre le fait que l'affirmation de l'énoncé est fausse.

(f) Vrai (en autant que les coûts unitaires c_{ij} soient positifs).

(g) Faux : l'exemple de la question (d) illustre le fait que l'affirmation de l'énoncé est fausse.

(h) Faux : il suffit de reprendre l'exemple de la question (d), mais de poser : $u_{12} = 6$.

(i) Faux : d'après la définition de solution de base à la page 250, «tous les arcs flottants sont des arcs de base» et l'arborescence des arcs de base ne contient aucun cycle.

(j) Faux : il suffit de reprendre l'exemple de la question (b), mais de poser : $v = 6$. Toute solution admissible de ce PFCM n'admet aucun arc à flot nul.

(k) Faux : il suffit de reprendre l'exemple de la question précédente.

(l) Faux : il suffit de reprendre l'exemple de la question (b), mais d'ajouter un arc $1 \rightarrow 4$ tel que $u_{14} = 6$ et $c_{14} = 26$. Le coût minimal C de ce PFCM est 45 et reste inchangé par le retrait de l'arc $1 \rightarrow 4$.

(m) Faux : il suffit de reprendre l'exemple de la question précédente.

(n) Faux : il suffit de reprendre l'exemple de la question (l), mais en posant $c_{14} = 6$. Le coût minimal du PFCM illustré en (b) est $C_b = 45$; lorsque l'on ajoute l'arc $1 \rightarrow 4$ de coût unitaire 6, le coût minimal C diminue à 18.

(o) Faux : reprenons l'exemple de la question (b); augmenter la borne de l'arc $2 \rightarrow 4$ n'aurait aucun impact sur la valeur du coût minimal C de l'acheminement du flot dans ce réseau.

(p) Faux : reprenons l'exemple de la question (b) et la solution de base optimale considérée en (d). Augmenter le coût unitaire de l'arc de base $1 \rightarrow 2$ n'aurait aucun impact sur la valeur du coût minimal C de l'acheminement du flot dans ce réseau, car on pourrait alors acheminer les 3 unités par le chemin $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$.

(q) Faux : la quantité de flot qui circulera sur l'arc entrant diminue lorsque cet arc était saturé. Par exemple, lors de l'itération n° 1 du problème de Marc (voir les figures 6.12 et 6.13), la valeur du flot sur l'arc entrant $3 \rightarrow 6$ passe de 12 à 4.

(r) Faux : la quantité de flot qui circulera sur l'arc sortant augmente quand cet arc apparaît affecté d'un signe $+\Delta$ dans le cycle associé à l'arc entrant. Par exemple, lors de l'itération n° 2 du problème de Marc (voir les figures 6.13 et 6.14), la valeur du flot sur l'arc sortant $1 \rightarrow 4$ passe de 11 à 13.

(s) Faux : l'arc qui entre dans la base est plutôt l'un de ceux auxquels est associée la diminution $|\,\mathrm{CM}_{ij}\,| \times \Delta$ la plus élevée. Par exemple, lors de l'itération n° 1 du problème de Marc (voir le tableau 6.1 à la page 256), le coût marginal de l'arc $4 \rightarrow 3$ est -42, tandis que celui de $3 \rightarrow 6$ est égal à -29 ; et pourtant c'est l'arc $3 \rightarrow 6$ qui entre dans la base parce que la diminution 232 associée à $3 \rightarrow 6$ est plus élevée que la diminution 84 associée $4 \rightarrow 3$.

(t) Faux, si l'on retient le critère mentionné dans l'étape 5 de la page 259. L'itération n° 1 de l'exercice 9(b) donne un exemple de situation où la diminution $|\,\mathrm{CM}_{ij}\,| \times \Delta$ la plus élevée est associée à plusieurs arcs.

(u) Faux, si l'on retient le critère de l'arc hors base associé à la plus petite borne supérieure de Δ. La figure 6.29 donne un exemple où plusieurs arcs de base pourraient servir d'arc sortant – de plus, on pourrait prendre en défaut la règle secondaire du coût unitaire le plus élevé en posant les coûts unitaires des trois arcs candidats $7 \rightarrow 2$, $5 \rightarrow 6$ et $5 \rightarrow 4$ tous égaux à la même valeur !

(v) Vrai. Voir l'étape 4, page 259.

(w) Vrai. D'après le théorème 5.4, il est possible d'acheminer C unités de la source au puits. Il est a fortiori possible d'en acheminer v unités.

(x) Faux. L'exemple de la question (b) admet deux solutions de base optimales dont l'arborescence des arcs de base est formée des arcs $1 \to 2$, $2 \to 4$ et $3 \to 4$:

- dans la première, déjà considérée en question (d), les 3 unités de flot passent par le chemin $1 \to 2 \to 4$ et $1 \to 3$, l'unique arc hors base, est à flot nul ;
- dans la seconde, les 3 unités de flot sont acheminées par le chemin $1 \to 3 \to 4$ et $1 \to 3$ est saturé.

Par contre, tel que mentionné à la page 252, «une fois connues la liste des arcs saturés et celle des arcs à flot nul il existe une et une seule façon de fixer les valeurs du flot sur les arcs de base de manière à obtenir une solution admissible».

(y) Faux. Reprenons l'exemple de la question (b), mais en posant $c_{13} = 4$: la solution de base optimale considérée en (d) contient un seul arc flottant, tandis que celle obtenue en faisant passer les trois unités par le chemin $1 \to 3 \to 4$ et admettant $2 \to 4$ comme arc hors base en contient deux.

(z) Faux. Reprenons l'exemple de la question (b), mais ajoutons deux arcs $2 \to 3$ et $3 \to 2$. Ce PFCM admet des solutions de base optimales différentes qui n'ont aucun arc de base en commun :

- dans l'une, le chemin $1 \to 2 \to 4$ convoie les 3 unités de flot et l'arborescence des arcs de base est formée des arcs $1 \to 2$, $2 \to 4$ et $2 \to 3$;
- dans l'autre, les 3 unités de flot sont acheminées par le chemin $1 \to 3 \to 4$ et l'arborescence des arcs de base est formée des arcs $1 \to 3$, $3 \to 4$ et $3 \to 2$.

11. Modèle linéaire associé à un PFCM

Min $z = 8x_{12} + 4x_{13} + 15x_{14} + 7x_{23} + 8x_{43} + 16x_{25} + 3x_{35} + 14x_{63} + 20x_{46} + 15x_{65} + 22x_{57} + 15x_{67}$

sous les contraintes :

Sommet 1 $x_{12} + x_{13} + x_{14} = 25$

Sommet 2 $- x_{12} + x_{23} + x_{25} = 0$

Sommet 3 $- x_{13} - x_{23} + x_{35} - x_{43} - x_{63} = 0$

Sommet 4 $- x_{14} + x_{43} + x_{46} = 0$

Sommet 5 $- x_{25} - x_{35} + x_{57} + x_{65} = 0$

Sommet 6 $- x_{46} + x_{63} - x_{65} + x_{67} = 0$

Sommet 7 $x_{57} + x_{67} = 25$

Borne 12 $0 \leq x_{12} \leq 31$

Borne 13 $0 \leq x_{13} \leq 25$

Borne 14 $0 \leq x_{14} \leq 27$

Borne 23 $0 \leq x_{23} \leq 20$

Borne 43 $0 \leq x_{43} \leq 30$

Borne 25 $0 \leq x_{25} \leq 12$

Borne 35 $0 \leq x_{35} \leq 6$

Borne 63 $0 \leq x_{63} \leq 11$

Borne 46 $0 \le x_{46} \le 35$

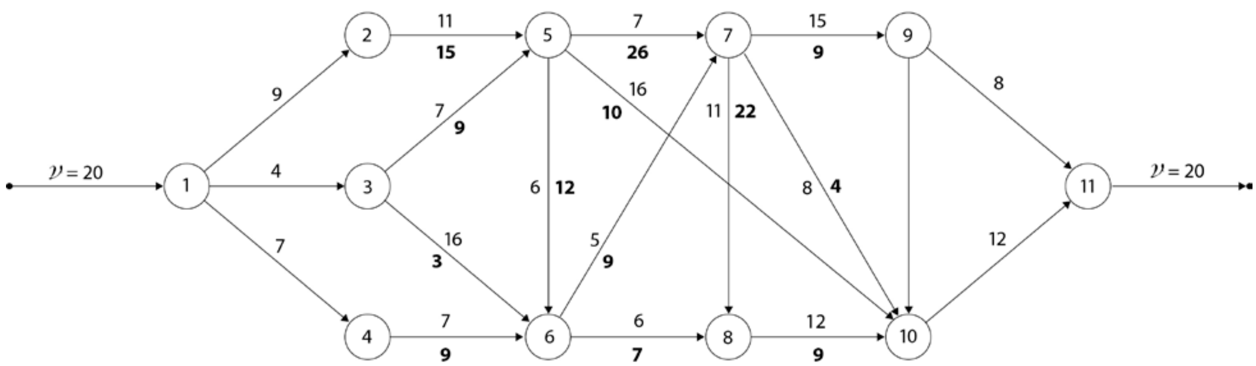
Borne 65 $0 \le x_{65} \le 40$

Borne 57 $0 \le x_{57} \le 30$

Borne 67 $0 \le x_{12} \le 40$.

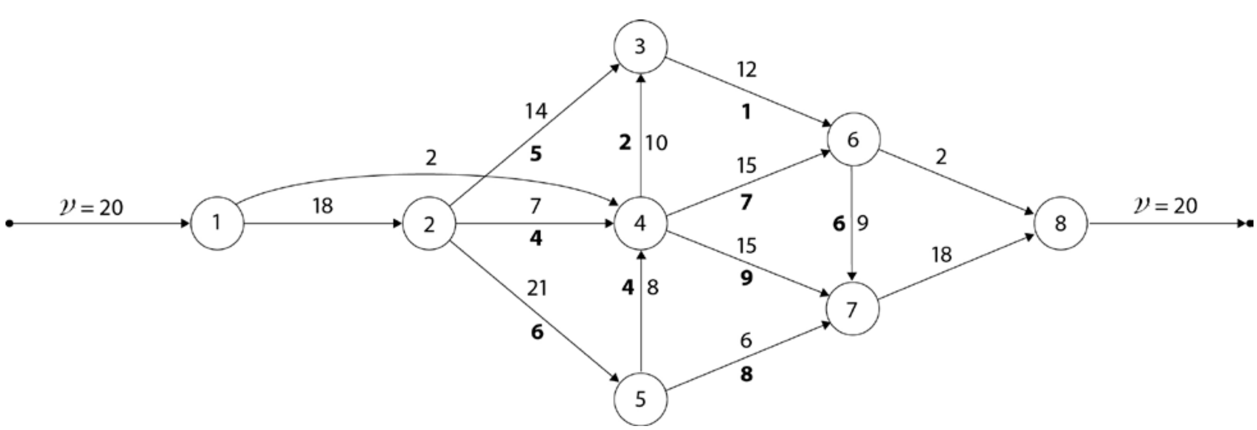
12. Un problème multisource et multipuits

On introduit d'abord des sommets S et P, qui serviront le premier de source unique et le second, de puits unique. On ajoute ensuite des arcs $\bullet \rightarrow$ S et P $\rightarrow \bullet$ affectés d'une contrainte de flot $v = 20$, puis des arcs S $\rightarrow$ 1, S $\rightarrow$ 2 et S $\rightarrow$ 3 munis de bornes supérieures 9, 4 et 7 respectivement, de même que des arcs 8 $\rightarrow$ P et 9 $\rightarrow$ P munis de bornes supérieures 8 et 12 respectivement. Ces 5 arcs sont de coût unitaire nul. Enfin, on renumérote les sommets de 1 à 11, S et P devenant 1 et 11 respectivement, les anciens numéros de 1 à 9 augmentant de 1. La figure résultante est donnée ci-dessous.



13. Un PFCM avec une borne inférieure

On introduit d'abord des sommets S et P et des arcs $\bullet \rightarrow$ S et P $\rightarrow \bullet$ affectés d'une contrainte de flot $v = 20$. On ajoute ensuite des arcs S $\rightarrow$ 1 et S $\rightarrow$ 3 munis de bornes supérieures 18 et 2 respectivement, de même que des arcs 6 $\rightarrow$ P et 5 $\rightarrow$ P munis de bornes supérieures 18 et 2 respectivement; la borne supérieure 17 de l'arc 3 $\rightarrow$ 5 est diminuée de 2 et devient 15. Enfin, on renumérote les sommets de 1 à 11, S et P devenant 1 et 11 respectivement, les anciens numéros de 1 à 9 augmentant de 1. La figure résultante est donnée ci-dessous.



14. L'affectation de tracteurs à des remorques

(a) Dans cet exercice et les suivants, les sommets, au lieu d'être numérotés de 1 à n, porteront un nom qui référera à l'objet contextuel associé; de plus, la notation (m; M) reportée sur un arc $i \rightarrow j$ signifiera que m est la borne inférieure de cet arc et que M en est la borne supérieure, autrement dit que le flot x_{ij} sur cet arc est soumis à la contrainte $m \leq x_{ij} \leq M$. Le réseau comporte :

- 5 sommets émetteurs, notés T1 à T5, sur lesquels sont reportées des bornes (1; 1);
- 10 sommets récepteurs, notés R0 à R9, sur lesquels sont reportés des bornes (0; 1) ainsi qu'un «coût» unitaire négatif correspondant au revenu donné dans le premier tableau de l'énoncé;
- et, pour tout i et tout j, un arc Ti → Rj sur lequel est reporté un coût unitaire obtenu en multipliant par 2 la distance donnée dans le second tableau de l'énoncé.

Le tableau suivant décrit une solution optimale, dont le revenu net total s'élève à 17 656 $. Le revenu net d'une attribution est obtenue en retranchant le coût reporté sur l'arc Ti → Rj du revenu associé à l'arc virtuel Rj → •. Par exemple, pour la 2e, 3200 – (2 × 26) = 3174.

Tracteur	T1	T2	T3	T4	T5
Remorque	R8	R6	R3	R0	R7
Revenu net	3796 $	3174 $	2970 $	3382 $	4334 $

(b) Deux modifications sont apportées au modèle.

- Enlever les arcs T1 → R7 et T1 → R8.
- Ajouter des sommets récepteurs G1, G2 et G3 pour représenter les régions 1, 2 et 3 respectivement. Remplacer l'arc virtuel Rj → • par un arc Rj → Gh, où h représente la région où est située la remorque Rj; sur cet arc Rj → Gh sont reportés les bornes (0; 1) et un profit unitaire correspondant au revenu brut associé à la remorque Rj. Enfin, ajouter des arcs virtuels Gh → • avec les bornes suivantes :

G1 → • bornes = (1; 3)

G2 → • bornes = (1; 3)

G3 → • bornes = (2; 4).

Le revenu net total maximal diminue à 17 468 $. Le tableau suivant décrit une solution optimale du modèle modifié.

Tracteur	T1	T2	T3	T4	T5
Remorque	R0	R6	R7	R3	R8
Revenu net	3308 $	3174 $	4350 $	2986 $	3650 $

(c) Remplacer l'arc virtuel G3 → • par les deux arcs suivants :

G3 → • profit unitaire = 0 bornes = (2; 2)

G3 → • profit unitaire = 500 bornes = (0; 2).

Le revenu net total maximal diminue à 17 334 $. Le tableau suivant décrit une solution optimale du modèle modifié.

Tracteur	T1	T2	T3	T4	T5
Remorque	R0	R8	R1	R3	R7
Revenu net	3308 $	3796 $	2910 $	2986 $	4334 $

(d) **1re solution**. Compte tenu des contraintes imposées dans la question (b), la condition additionnelle signifie qu'exactement trois remorques au total seront ramassées dans les régions 1 et 3. Il en résulte que le nombre de remorques ramassées dans les régions 1, 2 et 3 sera exactement de 1, 2 et 2 respectivement. Il suffit donc de reporter des bornes (1; 1) sur l'arc G1 → • et des bornes (2; 2) sur les arcs G2 → • et G3 → •.

2e solution. Ajouter un sommet T. Remplacer les arcs virtuels G1 → • et G3 → • par les arcs suivants :

G1 → T	profit unitaire = 0	bornes = (1; 3)
G3 → T	profit unitaire = 0	bornes = (2; 2)
G3 → T	profit unitaire = 500	bornes = (0; 2)
T → •	profit unitaire = 0	bornes = (0; 3).

Cette fois, le revenu net total maximal diminue à 16 992 $. Le tableau suivant décrit une solution optimale du modèle modifié.

Tracteur	T1	T2	T3	T4	T5
Remorque	R0	R8	R5	R3	R7
Revenu net	3308 $	3796 $	2568 $	2986 $	4334 $

15. L’heure de pointe dans un dédale urbain

Nous utilisons un réseau comportant 48 sommets et 87 arcs.

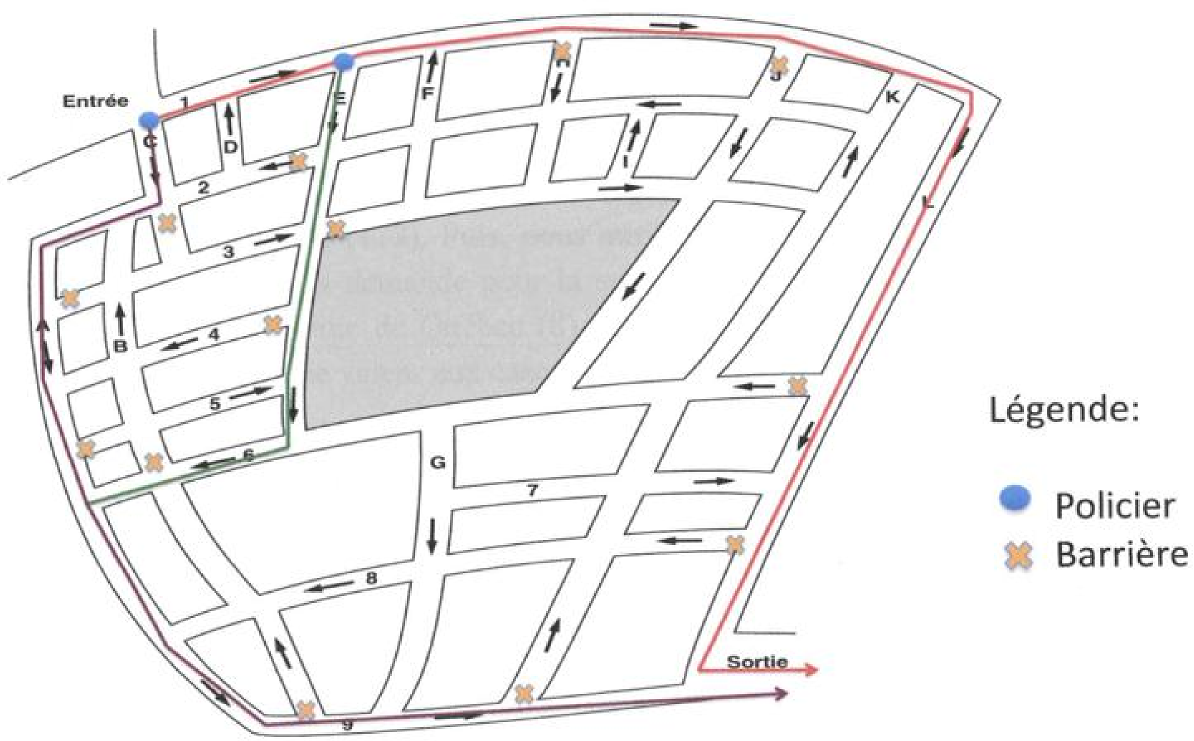
- Les sommets du réseau correspondent aux intersections du dédale urbain : C1, D1, E1, F1, H1, J1, K1, L1, A2, B2, C2, E2, …, G9, K9 et L9.
- Les arcs, outre les arcs virtuels • → C1 et L9 → •, correspondent aux tronçons du dédale, avec l’orientation permise par les sens uniques. Par exemple, le tronçon entre les intersections A2 et B2 sera traduit dans le réseau par un arc A2 → B2.
- L’unité de flot est un véhicule.
- Le coût unitaire associé à un arc $i \to j$ est la distance (en m) entre les deux intersections i et j situées aux extrémités du tronçon.
- On reporte des bornes (900; 900) sur les arcs virtuels • → C1 et L9 → •.
- Sur les arcs associés aux différents tronçons, on reporte comme borne supérieure le nombre de véhicules qui peuvent emprunter le tronçon durant l’heure de pointe; on reporte également sur ces arcs une borne inférieure nulle.

Le tableau de la page suivante résume les données de ce réseau et décrit une solution optimale. Cependant, pour alléger, nous avons omis certaines lignes du tableau dont le flot est nul à l'optimum : il s'agit des lignes correspondant aux tronçons orientés vers le haut et à certains tronçons des lignes 2, 3 et 8. Selon cette solution, les 900 véhicules parcourront 2 305 000 mètres au total. Le flot des 900 véhicules se divisera d'abord en deux à l'intersection C1.

- Un 1[er] bloc de 500 véhicules emprunteront l'itinéraire C1 → C2 → B2 → A2 → A3 → A4 → A5 → A6 → A8 → A9 → B9 → G9 → K9 → L9.

- Les 400 autres véhicules seront initialement dirigés sur le tronçon C1 → D1. À l'intersection D1, ils n'auront d'autre choix, à cause du sens unique D2 → D1, que de continuer jusqu'à l'intersection E1. Mais, à cet endroit, ce flot sera scindé : 380 véhicules poursuivront leur route vers F1 et adopteront l'itinéraire C1 → D1 → E1 → F1 → H1 → J1 → K1 → L1 → L6 → L7 → L8 → L9; les 20 autres véhicules tourneront à leur droite et suivront l'itinéraire C1 → D1 → E1 → E2 → E3 → E4 → E5 → E6 → B6 → A6 → A8 → A9 → B9 → G9 → K9 → L9. Noter que sur les tronçons A6 → A8 à K9 → L9, ces 20 véhicules se joindront aux 500 du 1[er] bloc qui auront passé par le tronçon C2.

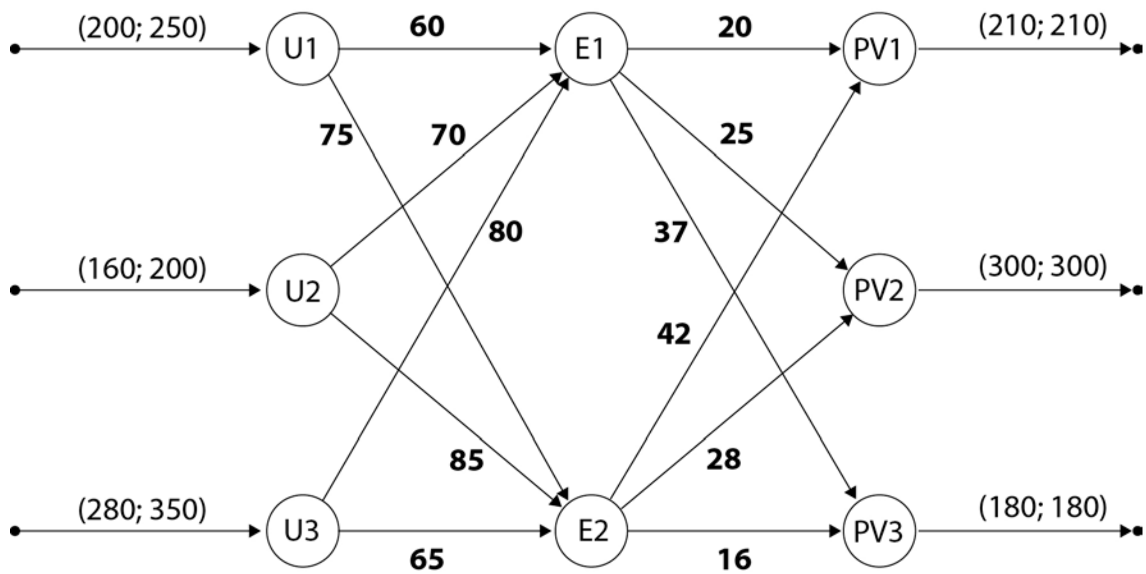
Par conséquent, deux policiers, placés aux intersections C1 et E1, seront nécessaires pour gérer le trafic dans le dédale. De plus, des barrières seront installées aux intersections A3, A5, B6, B9, C2, E2, E3, E4, H1, J1, K9, L6 et L8. La figure ci-dessous schématise les différents chemins qui, selon cette solution, seront empruntés par les automobiles.



Données concernant les arcs							Solution optimale	
No	Nom	S. initial	S. terminal	Coût un.	Borne inf.	Borne sup.	Flot	Coût
1	Arc 01	.	C1	0	900	900	900	0
2	Arc 02	C1	D1	105	0	500	400	42000
3	Arc 03	D1	E1	210	0	500	400	84000
4	Arc 04	E1	F1	140	0	500	380	53200
5	Arc 05	F1	H1	215	0	500	380	81700
6	Arc 06	H1	J1	345	0	500	380	131100
7	Arc 07	J1	K1	200	0	500	380	76000
8	Arc 08	K1	L1	140	0	500	380	53200
9	Arc 09	B2	A2	115	0	520	500	57500
10	Arc 10	C2	B2	55	0	520	500	27500
11	Arc 11	D2	C2	135	0	520	0	0
17	Arc 17	K2	J2	200	0	520	0	0
18	Arc 18	A3	B3	110	0	520	0	0
25	Arc 25	J3	K3	200	0	520	0	0
26	Arc 26	B4	A4	130	0	500	0	0
27	Arc 27	E4	B4	345	0	500	0	0
28	Arc 28	A5	B5	105	0	500	0	0
29	Arc 29	B5	E5	220	0	500	0	0
30	Arc 30	B6	A6	130	0	520	20	2600
31	Arc 31	E6	B6	280	0	520	20	5600
32	Arc 32	G6	E6	230	0	520	0	0
33	Arc 33	J6	G6	205	0	520	0	0
34	Arc 34	K6	J6	215	0	520	0	0
35	Arc 35	L6	K6	200	0	520	0	0
36	Arc 36	G7	K7	340	0	470	0	0
37	Arc 37	K7	L7	250	0	470	0	0
42	Arc 42	A9	B9	85	0	600	520	44200
43	Arc 43	B9	G9	135	0	600	520	70200
44	Arc 44	G9	K9	260	0	600	520	135200
45	Arc 45	K9	L9	335	0	600	520	174200
46	Arc 46	A2	A3	150	0	525	500	75000
47	Arc 47	A3	A4	150	0	525	500	75000
48	Arc 48	A4	A5	160	0	525	500	80000
49	Arc 49	A5	A6	150	0	525	500	75000
50	Arc 50	A6	A8	320	0	525	520	166400
51	Arc 51	A8	A9	285	0	525	520	148200
58	Arc 58	C1	C2	170	0	500	500	85000
59	Arc 59	C2	C3	170	0	500	0	0
61	Arc 61	E1	E2	180	0	450	20	3600
62	Arc 62	E2	E3	180	0	450	20	3600
63	Arc 63	E3	E4	190	0	450	20	3800
64	Arc 64	E4	E5	170	0	450	20	3400
65	Arc 65	E5	E6	125	0	450	20	2500
68	Arc 68	G6	G7	175	0	425	0	0
69	Arc 69	G7	G8	170	0	425	0	0
70	Arc 70	G8	G9	370	0	425	0	0
71	Arc 71	H1	H2	180	0	425	0	0
72	Arc 72	H2	H3	185	0	425	0	0
74	Arc 74	J1	J2	180	0	500	0	0
75	Arc 75	J2	J3	185	0	500	0	0
76	Arc 76	J3	J6	575	0	500	0	0
83	Arc 83	L1	L6	750	0	380	380	285000
84	Arc 84	L6	L7	245	0	380	380	93100
85	Arc 85	L7	L8	140	0	380	380	53200
86	Arc 86	L8	L9	300	0	380	380	114000
87	Arc 87	L9	.	0	0	900	900	0

16 Le problème de transbordement

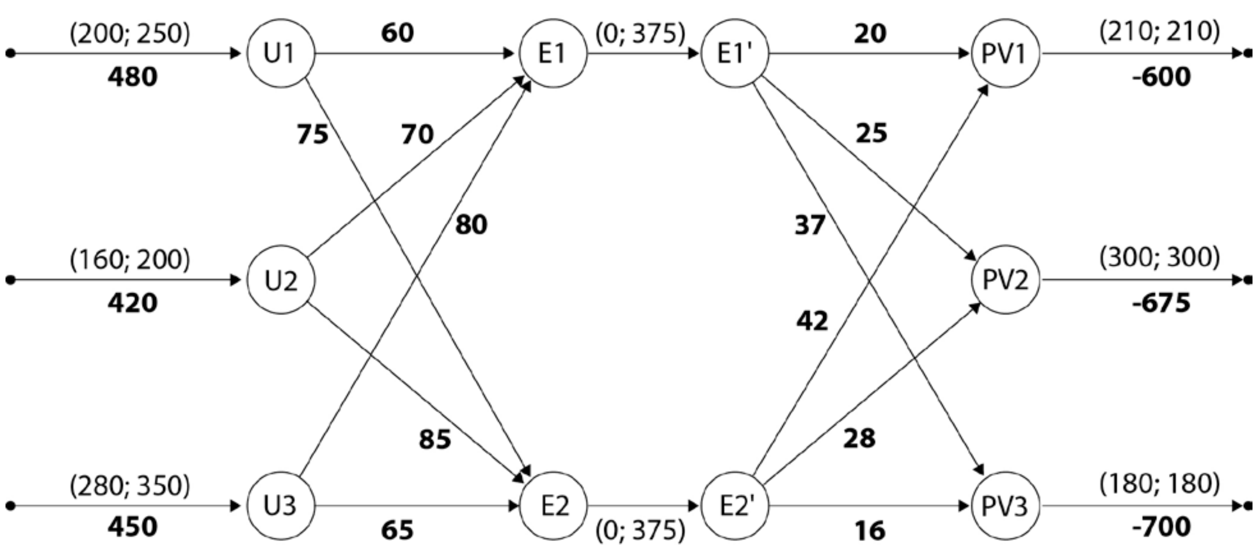
(a) La figure ci-dessous représente le modèle PFCM demandé. Les capacités des arcs non virtuels ne sont pas nécessaires dans un tel modèle et sont laissées implicites; on pourra supposer que ces capacités sont par convention égales au maximum d'unités qui peuvent être acheminées dans ce réseau, soit à la somme 800 des trois bornes supérieures des arcs virtuels associés aux usines.



(b) Il suffit de reporter des coûts de 480 sur l'arc • ⟶ U1, de 420 sur l'arc • ⟶ U2 et de 450 sur l'arc • ⟶ U3.

(c) On procède comme à la question précédente, mais en exprimant les revenus comme des coûts négatifs : on reporte donc des coûts de –600 sur l'arc PV1 ⟶ •, de –675 sur l'arc PV2 ⟶ • et de –700 sur l'arc PV3 ⟶ •.

(d) La figure ci-dessous représente le modèle modifié demandé.

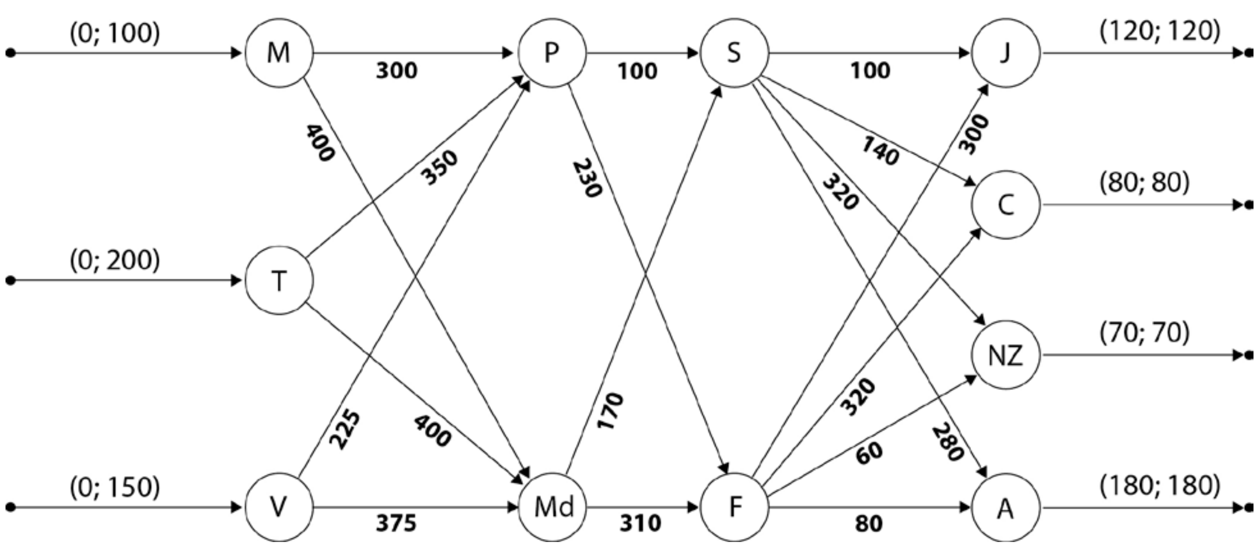


(e) Le revenu net maximal de l'entreprise s'élèvera à 83 790 dollars. Les usines U1 et U2 produiront chacune 200 unités, tandis que U3 en produira 290. Le tableau ci-dessous décrit un plan de transport optimal : par exemple, 175 unités seront expédiées de l'usine à l'entrepôt 1, et 135 unités de l'entrepôt 2 au point de vente 2.

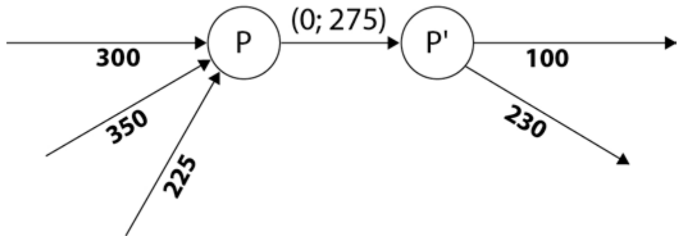
	U1	U2	U3	PV1	PV2	PV3
E1	200	175	0	210	165	0
E2	0	25	290	0	135	180

17. Les cannettes de Canul

(a) La figure ci-dessous donne un réseau traduisant le problème de Canul. L'unité de flot est, dans le sous-réseau à la droite des sommets représentant les ateliers d'assemblage, une machine pour fabriquer des canettes d'aluminium, et, dans le sous-réseau à la gauche de ces mêmes sommets, l'ensemble des pièces associées à une machine, incluant les pièces de rechange. Ici, comme dans le problème précédent, les capacités des arcs non virtuels ne sont pas nécessaires dans un tel modèle et sont laissées implicites; on pourra supposer que ces capacités sont par convention égales au maximum d'unités qui peuvent être acheminées dans ce réseau, soit à la somme 450 des trois bornes supérieures des arcs virtuels associés aux usines.



(b) Il suffit de dédoubler le sommet P. Ainsi, le sommet P et les arcs contigus à P sont remplacés par le sous-réseau suivant.



(c) Il suffit de remplacer les quatre arcs émergeant de F par le sous-réseau suivant.