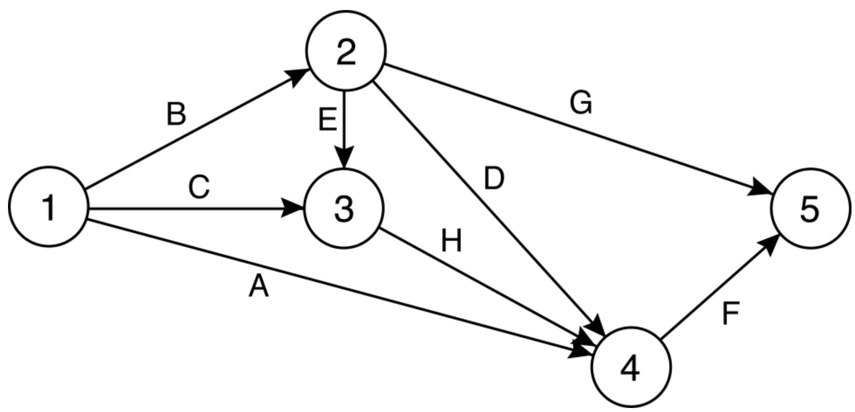
Chapitre 7 – Solutions des problèmes

1. Modifications à apporter à un réseau.

Dans le réseau proposé, la tâche H ne précède pas la tâche F, contrairement à ce qui est spécifié dans le tableau des prédécesseurs immédiats donné dans l'énoncé du problème. Un réseau corrigé, conforme aux données du tableau, est présenté ci-dessous.



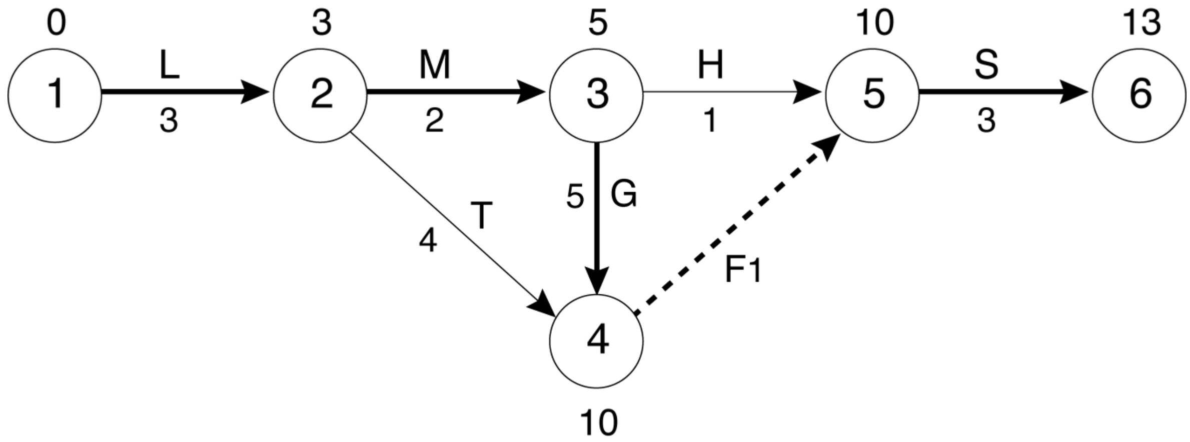
2. Énumération des chemins d'un réseau.

Les chemins possibles, ainsi que leurs durées, sont énumérés dans le tableau ci-dessous. L'unique chemin critique, de longueur 28, est : $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$.

Chemin	Durée
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$	26
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$	22
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$	25
$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$	28
$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$	24

3. Chemin critique.

(a) Un réseau qui représente ce projet est donné ci-dessous (voir page suivante). Afin de faciliter le calcul des réponses aux questions (b) et (c), ont été ajoutés les moments au plus tôt des différents sommets et, lorsqu'ils diffèrent, les moments au plus tard (cette convention sera respectée dans toutes les figures du présent fichier où il est pertinent d'indiquer les moments).

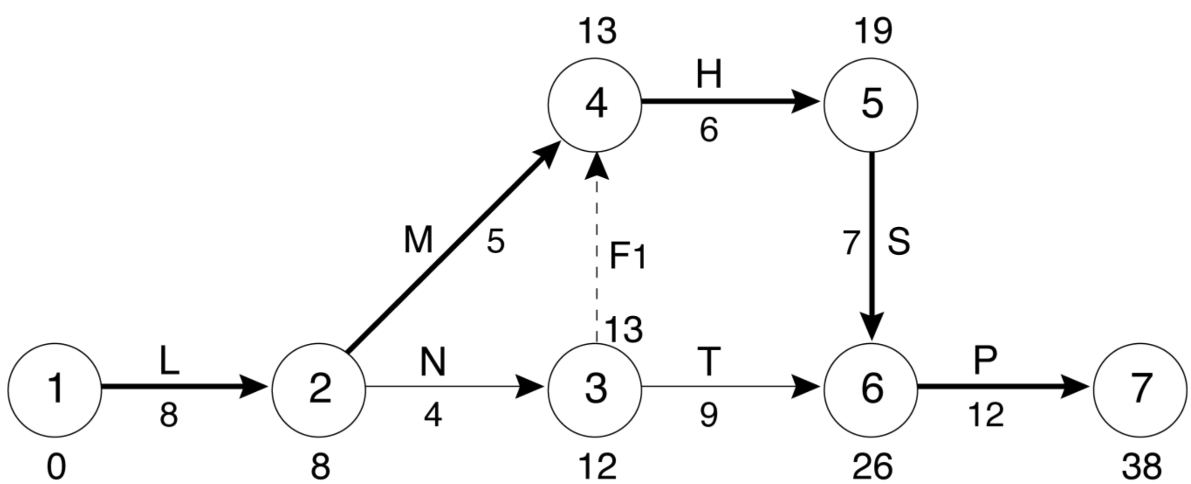


(b) La date d'achèvement au plus tôt du projet est 13.

(c) L'unique chemin critique est : L $\rightarrow$ M $\rightarrow$ G $\rightarrow$ F1 $\rightarrow$ S.

4. Moments au plus tôt et au plus tard.

(a) Un réseau qui représente ce projet est donné ci-dessous. Cette fois encore, les moments au plus tôt des différents sommets et, lorsqu'ils diffèrent, les moments au plus tard ont été ajoutés, afin d'illustrer les réponses aux questions (b), (c) et (d).



(bc) Les moments au plus tôt et au plus tard des différentes tâches sont donnés dans le tableau reproduit au haut de la page suivante.

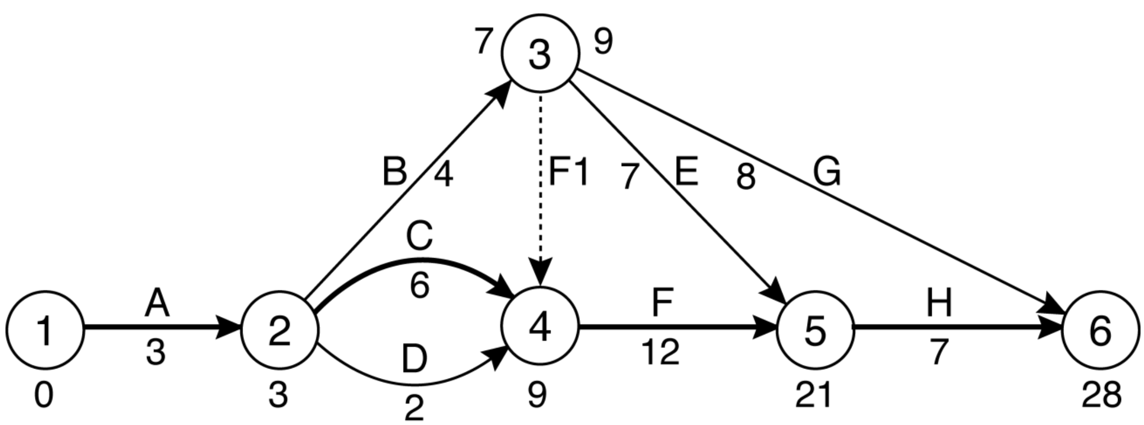
(d) L'unique chemin critique, de longueur 38, est : L $\rightarrow$ M $\rightarrow$ H $\rightarrow$ S $\rightarrow$ P.

MOG7-04 Moments au plus tôt et au plus tard : tableau des moments

Tâche	ES	EF	LS	LF
L	0	8	0	8
M	8	13	8	13
N	8	12	9	13
H	13	19	13	19
S	19	26	19	26
T	12	21	17	26
P	26	38	26	38
F1	12	12	13	13

5. Marge des tâches.

(a) Un réseau qui représente ce projet est donné ci-dessous. Conformément à la convention mentionnée précédemment, les moments au plus tôt des différents sommets et, lorsqu'ils diffèrent, les moments au plus tard ont été ajoutés, afin de faciliter le calcul des réponses aux questions subséquentes.



(b) L'unique chemin critique, de longueur 28, est : A → C → F → H.

(c) La marge de F est nulle, car la tâche F fait partie du chemin critique : en effet,

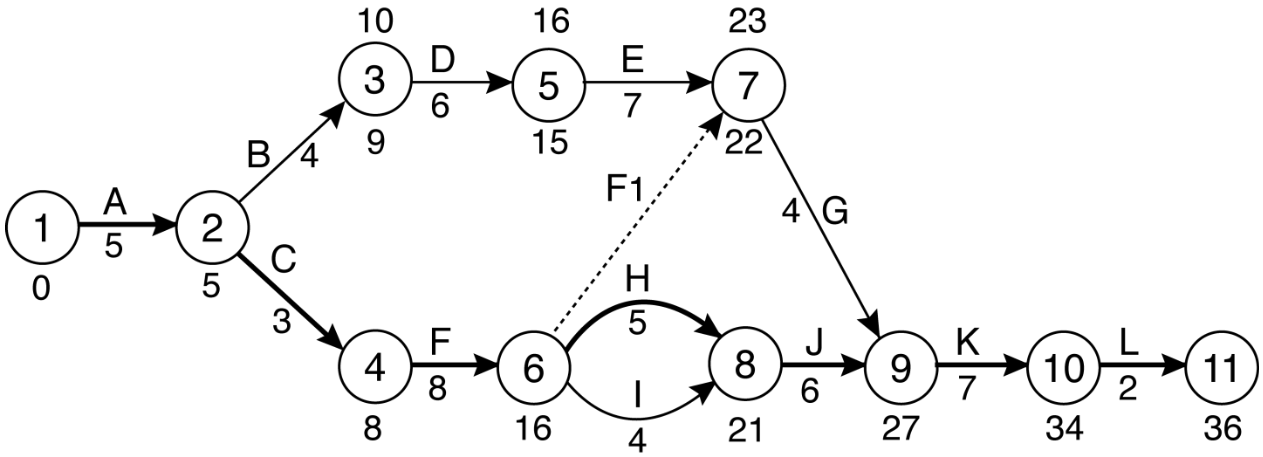
$$\text{marge de F} = L(5) - E(4) - d_F = 21 - 9 - 12 = 0.$$

Par contre, G ne fait pas partie du chemin critique et sa marge est positive :

$$\text{marge de G} = L(6) - E(3) - d_G = 28 - 7 - 8 = 13.$$

6. Suppression d'une tâche.

(a) Un réseau qui représente ce projet est donné ci-dessous.



(b) L'unique chemin critique, de longueur 36, est : A → C → F → H → J → K → L.

(c) La suppression de J entraînerait les modifications suivantes : la tâche G se terminerait au sommet terminal commun de H et de I; ce sommet 8 deviendrait le sommet initial de K; les sommets 10 et 11 seraient renumérotés 9 et 10 respectivement; le chemin critique deviendrait A → B → D → E → G → K → L et la durée minimale du projet diminuerait à 35 périodes.

7. Modification de la durée des tâches et chemin critique.

Les moments au plus tôt et au plus tard du réseau sont donnés dans le tableau ci-dessous. La durée minimale du projet est de 22 jours et l'unique chemin critique est : B → G → H.

Sommet *s*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
E(*s*)	0	6	9	17	22
L(*s*)	0	6	14	17	22

(a) Notons d'abord que la marge de la tâche A est de 11 jours :

$$\text{marge de A} \;=\; L(3) - E(1) - d_A \;=\; 14 - 0 - 3 \;=\; 11.$$

Pour que A appartienne à un chemin critique, il faudrait que sa durée augmente de 11 jours ou plus.

(b) La durée de la tâche G devrait être diminuée de plus de 5 jours. Dans un tel cas, le projet pourrait être parachevé en 17 jours et le chemin critique serait B → E → D.

(c) On peut poursuivre cette opération jusqu'à ce que la durée de la tâche H soit nulle ou qu'un autre chemin devienne critique. Ici, ces deux cas surviennent simultanément : lorsque la durée de H est diminuée de 5 jours, les chemins B → E → D et B → G → H sont tous deux critiques.

8. Tâche critique.

Pour que la tâche K appartienne à un chemin critique, sa durée doit être égale ou supérieure à la durée minimale du projet, qui est de 35 jours.

9. Chemin critique et modèle linéaire.

(a) Les tâches de marge nulle sont celles représentées par les arcs $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 6$, $6 \rightarrow 7$ et $7 \rightarrow 8$.

(b) L'unique chemin critique, d'une longueur de 34 jours, est composé des arcs donnés en (a).

(c) Considérons les durées sur les arcs comme des coûts et cherchons à maximiser le coût total lorsque le sommet 1 émet une unité de flot, que les sommets 2 à 7 sont des sommets de transbordement et que le sommet 8 absorbe l'unique unité de flot qui transite dans le réseau. Le modèle linéaire associé à ce réseau donnera, à l'optimum, un chemin le plus long. Noter que, à l'optimum, la quantité de flot sur chacun des arcs sera nulle ou égale à 1. Il est donc possible d'utiliser comme variables de décision les variables binaires v_{ij} définies ainsi :

$$v_{ij} = 1 \text{ si l'arc } i \rightarrow j \text{ fait partie du chemin critique}$$

où $i \rightarrow j$ est l'un des arcs du réseau. L'objectif consiste à maximiser z, où

$$z = 4\,v_{12} + 8\,v_{23} + 6\,v_{24} + 7\,v_{36} + 3\,v_{45} + 4\,v_{46} + 6\,v_{57} + 7\,v_{67} + 8\,v_{78}.$$

À chaque sommet est associée une contrainte technologique qui contrôle le flot.

Sommet 1	$v_{12} = 1$
Sommet 2	$v_{12} - v_{23} - v_{24} = 0$
Sommet 3	$v_{23} - v_{36} = 0$
Sommet 4	$v_{24} - v_{45} - v_{46} = 0$
Sommet 5	$v_{45} - v_{57} = 0$
Sommet 6	$v_{36} + v_{46} - v_{67} = 0$
Sommet 7	$v_{57} + v_{67} - v_{78} = 0$
Sommet 8	$v_{78} = 1.$

Une solution optimale donne :

$$v_{12} = v_{23} = v_{36} = v_{67} = v_{78} = 1$$

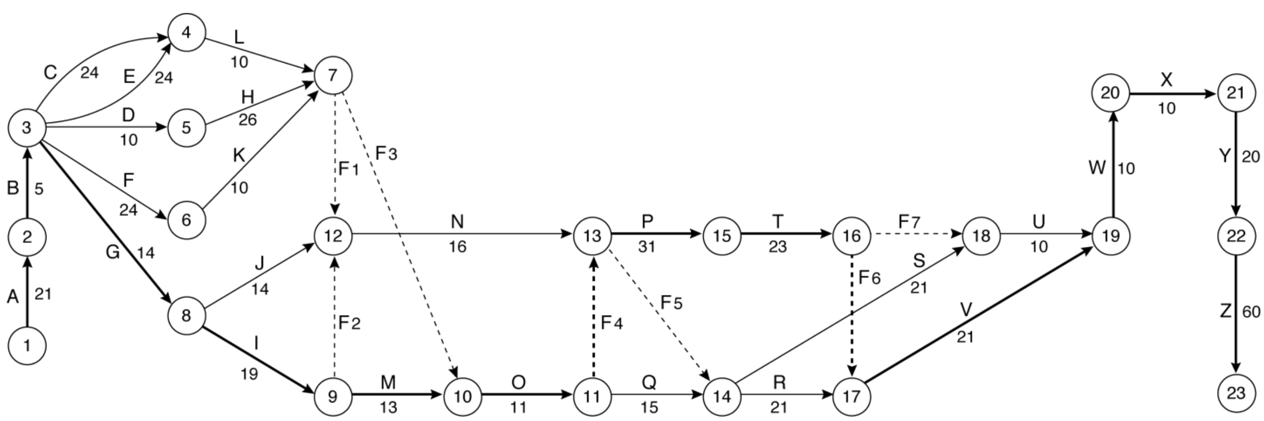
$$z = 34 \quad \text{(jours).}$$

Note. Les contraintes «Sommet 1» et «Sommet 8» sont redondantes dans ce modèle : en leur absence, les variables v_{12} et v_{78} prendraient quand même leur valeur maximale 1 à l'optimum, car leurs coefficients dans la fonction-objectif sont positifs. Ces deux équations sont incluses malgré tout, car elles facilitent la lecture du modèle en indiquant explicitement quel est le sommet émetteur du réseau et quel en est le sommet récepteur. Ces contraintes associées aux sommets extrêmes, qui sont redondantes quand on recourt à des variables binaires comme variables de décision, deviennent nécessaires si on utilise, conformément à l'approche générale décrite en section 5.1.4, des variables entières x_{ij}, où

$$x_{ij} = \text{nombre d'unités de flot transitant par l'arc } i \rightarrow j.$$

10. Hydro-Québec.

Un réseau représentant ce projet est reproduit ci-dessous. Le 1[er] des deux tableaux qui suivent cette figure donne les moments au plus tôt et au plus tard des sommets du réseau (sauf le sommet 1, dont les moments sont nuls, comme dans tous les projets); dans le 2[e] tableau, on retrouve les marges des différentes tâches.



Sommet *s*	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
E(*s*)	21	26	50	36	50	62	40	59	72	83	62
L(*s*)	21	26	57	41	57	67	40	59	72	83	67
Sommet *s*	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**
E(*s*)	83	98	114	137	137	137	158	168	178	198	258
L(*s*)	83	116	114	137	137	148	158	168	178	198	258

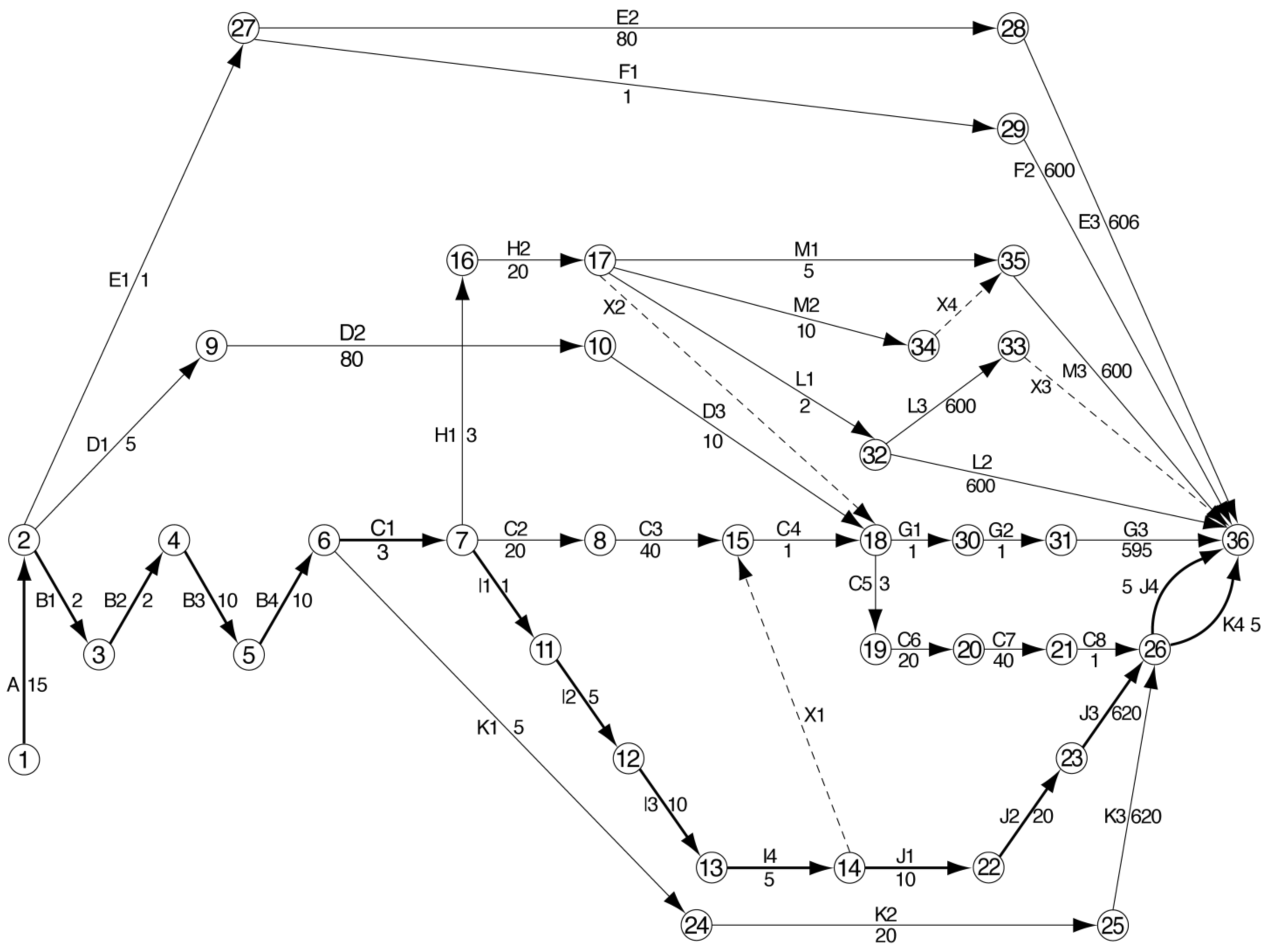
Tâche	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**
Marge	0	0	7	5	7	7	0	5	0	13	7
Tâche	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**
Marge	7	0	5	0	0	18	18	29	0	11	0
Tâche	**W**	**X**	**Y**	**Z**	**F1**	**F2**	**F3**	**F4**	**F5**	**F6**	**F7**
Marge	0	0	0	0	5	8	10	0	33	0	11

Le projet exige 258 jours. Les tâches critiques sont celles qui forment l'unique chemin critique :

$$A \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow I \rightarrow M \rightarrow O \rightarrow F4 \rightarrow P \rightarrow T \rightarrow F6 \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z.$$

11. Planification familiale en Tataouine.

Un réseau représentant ce projet est reproduit ci-dessous.



Le 1[er] des deux tableaux ci-dessous (voir page suivante) donne les moments au plus tôt et au plus tard des sommets du réseau; le 2[e], les marges des différentes tâches.

Le projet exige 718 jours. Il existe deux chemins critiques, qui ne diffèrent que par la dernière tâche :

A → B1 → B2 → B3 → B4 → C1 → I1 → I2 → I3 → I4 → J1 → J2 → J3 → J4

A → B1 → B2 → B3 → B4 → C1 → I1 → I2 → I3 → I4 → J1 → J2 → J3 → K4.

MOG7-11 Planification familiale en Tataouine : tableaux des moments et des marges

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
E(*s*)	0	15	17	19	29	39	42	62	20	100	43	48
L(*s*)	0	15	17	19	29	39	42	80	31	111	43	48
Sommet	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
E(*s*)	58	63	102	45	65	110	113	133	173	73	93	44
L(*s*)	58	63	120	88	108	121	652	672	712	73	93	73
Sommet	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
E(*s*)	64	713	16	96	17	111	112	67	667	75	75	718
L(*s*)	93	713	32	112	118	122	123	118	718	118	118	718

Tâche	A	B1	B2	B3	B4	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Marge	0	0	0	0	0	0	18	18	18	539	539	539
Tâche	**C8**	**D1**	**D2**	**D3**	**E1**	**E2**	**E3**	**F1**	**F2**	**G1**	**G2**	**G3**
Marge	539	11	11	11	16	16	16	21	21	11	11	11
Tâche	**H1**	**H2**	**I1**	**I2**	**I3**	**I4**	**J1**	**J2**	**J3**	**J4**	**K1**	**K2**
Marge	43	43	0	0	0	0	0	0	0	0	29	29
Tâche	**K3**	**K4**	**L1**	**L2**	**L3**	**M1**	**M2**	**M3**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**
Marge	29	0	51	51	51	48	43	43	57	56	51	43

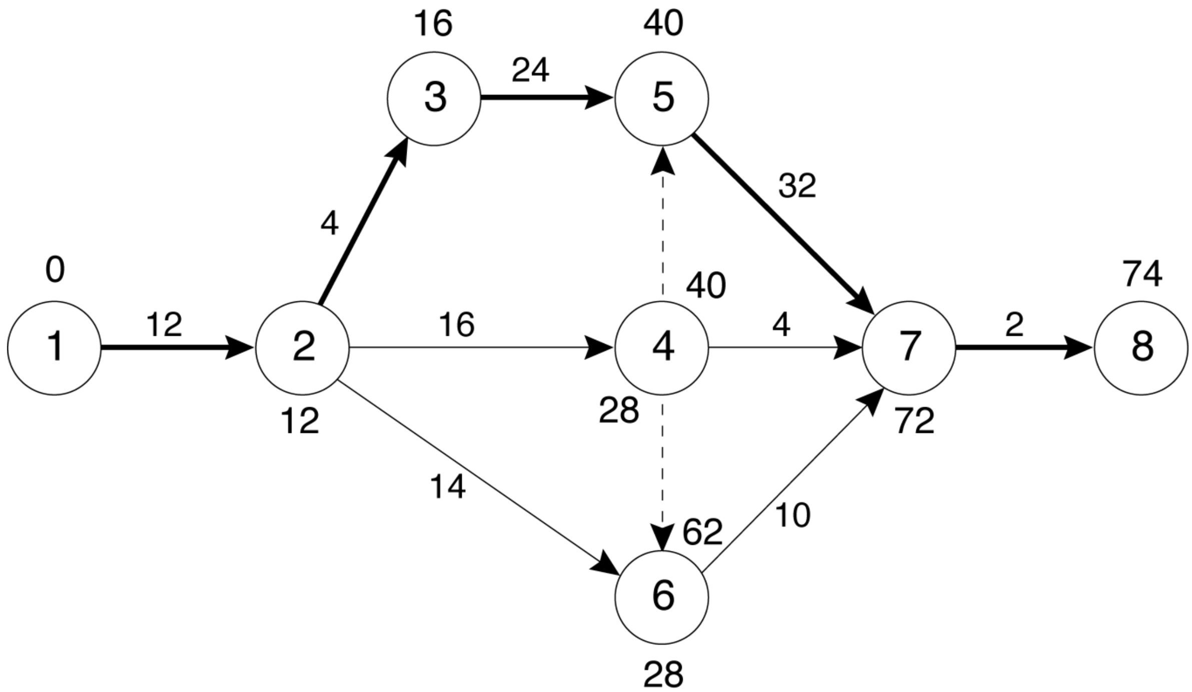
12. Belladone.

(a) Selon la figure ci-dessous (voir page suivante), la durée minimale du projet, si toutes les tâches sont exécutées à la vitesse normale, est de 74 jours. L'unique chemin critique est formé des arcs, tâches, 1-2, 2-3, 3-5, 5-7 et 7-8.

(b) Parmi les tâches critiques, 5-7 est celle dont le coût d'accélération est le plus faible. On accélère donc la tâche 5-7 d'un jour, ce qui réduit la durée du projet d'un jour et coûte 100 $.

(c) Après l'accélération retenue à la question (b), l'unique chemin critique est encore formé des arcs 1-2, 2-3, 3-5, 5-7 et 7-8. On choisit à nouveau d'accélérer la tâche 5-7. Ainsi, en accélérant la tâche 5-7 de 2 jours, ce qui coûte 200 $, on réduit d'autant la durée du projet.

MOG7-12 Belladone



(d) Si on ne tient pas compte des coûts à assumer, on utilisera les durées accélérées. La durée minimale du projet est alors de 53 jours.

13. Implantation d'un progiciel de gestion de paie et des ressources humaines.

(a) Un réseau représentant ce projet est reproduit à la page suivante. Le tableau ci-dessous donne les moments au plus tôt et au plus tard des 13 sommets du réseau. L'étude préliminaire exigera 76 jours.

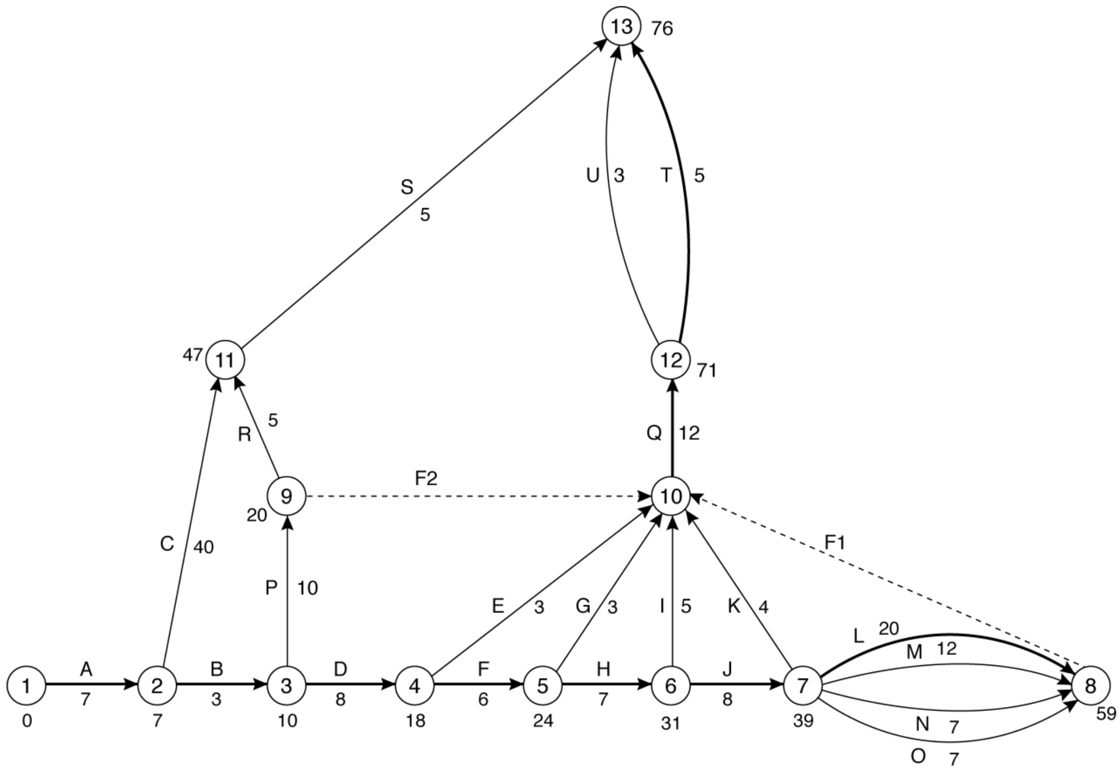
Sommet *s*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
E(*s*)	0	7	10	18	24	31	39	59	20	59	47	71	76
L(*s*)	0	7	10	18	24	31	39	59	59	59	71	71	76

(b) Le réseau admet un seul chemin critique : A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ D $\rightarrow$ F $\rightarrow$ H $\rightarrow$ J $\rightarrow$ L $\rightarrow$ F1 $\rightarrow$ Q $\rightarrow$ T.

(c) Le tableau suivant donne les marges demandées.

Tâche	C	D	E	M
Marge	24	0	38	8

MOG7-13 Implantation d'un progiciel de gestion de paie et des ressources humaines



(d) Le modèle linéaire utilisé comporte, comme d'habitude, des variables de décision réelles qui indiquent le moment où seront atteint chacun des sommets du réseau et des variables donnant le nombre de périodes d'accélération des tâches dont la durée peut être réduite en faisant participer des utilisateurs :

x_s = moment où se produit l'événement s

Acc_t = réduction (en jours) de la durée de la tâche t grâce à l'accélération,

où s = 1, 2, …, 13 et où t = D, F, H, I, J. On ajoute des variables binaires pour tenir compte de la possibilité d'ajouter des consultants spécialisés en implantation de progiciels :

$v_t = 1$ si on recourt à des consultants pour accélérer la tâche t,

où t = A, L, M, O, P, Q, T, U. L'objectif consiste à minimiser le coût total z d'accélération, où

$$z = 5\ v_A + 15\ v_L + 6\ v_M + \ldots + 3\ v_U + 1\ \text{Acc}_D + 1{,}4\ \text{Acc}_F + 1{,}2\ \text{Acc}_H + 1\ \text{Acc}_I + 1{,}5\ \text{Acc}_J.$$

Voici les contraintes technologiques de ce modèle.

Fin Projet $x_{13} \leq 60$

Durée A $-x_1 + x_2 + 2\ v_A \geq 7$

Durée B $-x_2 + x_3 \geq 3$

Durée C	$-x_2 + x_{11} \geq 40$
Durée D	$-x_3 + x_4 + \mathrm{Acc_D} \geq 8$
Durée E	$-x_4 + x_{10} \geq 3$
Durée F	$-x_4 + x_5 + \mathrm{Acc_F} \geq 6$
Durée G	$-x_5 + x_{10} \geq 3$
Durée H	$-x_5 + x_6 + \mathrm{Acc_H} \geq 7$
Durée I	$-x_6 + x_{10} + \mathrm{Acc_I} \geq 5$
Durée J	$-x_6 + x_7 + \mathrm{Acc_J} \geq 8$
Durée K	$-x_7 + x_{10} \geq 4$
Durée L	$-x_7 + x_8 + 6\, v_\mathrm{L} \geq 20$
Durée M	$-x_7 + x_8 + 2\, v_\mathrm{M} \geq 12$
Durée N	$-x_7 + x_8 \geq 7$
Durée O	$-x_7 + x_8 + 2\, v_\mathrm{O} \geq 7$
Durée P	$-x_3 + x_9 + 3\, v_\mathrm{P} \geq 10$
Durée Q	$-x_0 + x_{12} + 4\, v_\mathrm{Q} \geq 12$
Durée R	$-x_9 + x_{11} \geq 5$
Durée S	$-x_{11} + x_{13} \geq 5$
Durée T	$-x_{12} + x_{13} + 1\, v_\mathrm{T} \geq 5$
Durée U	$-x_{12} + x_{13} + 1\, v_\mathrm{U} \geq 3$
Durée F1	$-x_8 + x_{10} \geq 0$
Durée F2	$-x_9 + x_{10} \geq 0$
MaxAccél D	$\mathrm{Acc_D} \leq 2$
MaxAccél F	$\mathrm{Acc_F} \leq 1$
MaxAccél H	$\mathrm{Acc_H} \leq 3$
MaxAccél I	$\mathrm{Acc_I} \leq 1$
MaxAccél J	$\mathrm{Acc_J} \leq 3$.

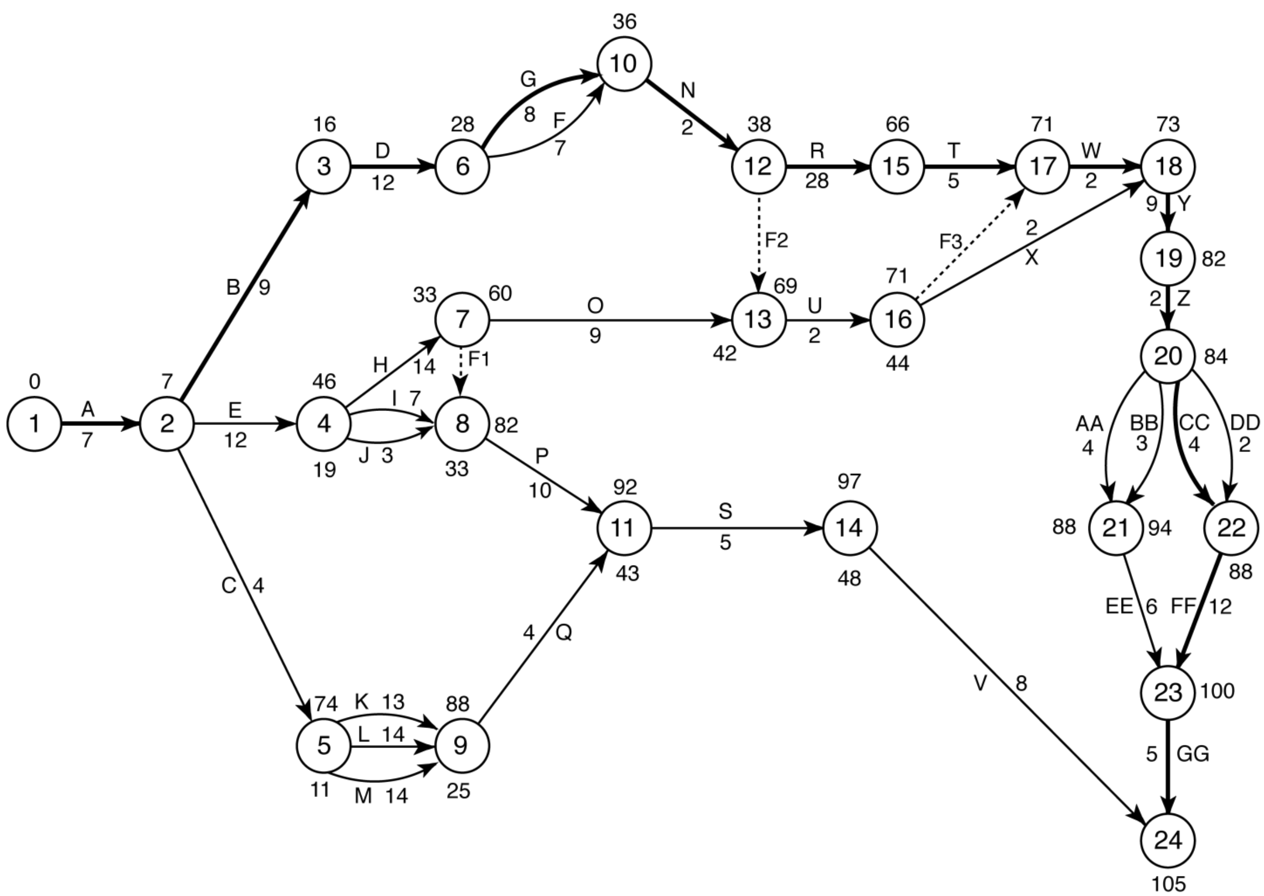
L'entreprise devrait recourir à des consultants pour accélérer les tâches A et L; de plus, on devrait faire participer les utilisateurs selon les recommandations du tableau ci-dessous. Le coût total z d'accélération s'élèvera à 30 000 $.

Durée (en jours) de la collaboration des utilisateurs

Tâche	**D**	**F**	**H**	**I**	**J**
Durée (en jours)	2	1	3	0	2

14. ***CPM* et *PERT*.**

(a) Un réseau qui représente ce projet est donné ci-dessous. Conformément à la convention mentionnée précédemment, les moments au plus tôt des différents sommets et, lorsqu'ils diffèrent, les moments au plus tard ont été ajoutés, afin de faciliter le calcul des réponses aux questions subséquentes.



(b) La durée minimale du projet est de 105 périodes.

(c) L'unique chemin critique du projet est :

$$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow N \rightarrow R \rightarrow T \rightarrow W \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow CC \rightarrow FF \rightarrow GG.$$

Les tâches critiques sont celles qui forment ce chemin critique.

(d) On utilise un modèle linéaire dont les variables de décision sont définies de la façon suivante :

x_s = moment où se produit l'événement s

Acc_t = réduction (en jours) de la durée de la tâche t grâce à l'accélération, où t = A, B, C, D, E, F, G, AA, BB, CC, DD, EE, FF, GG. L'objectif consiste à minimiser le coût total z d'accélération, où

$$z = 200\ (\mathrm{Acc}_A + \mathrm{Acc}_B + \ldots + \mathrm{Acc}_G) + 100\ (\mathrm{Acc}_{AA} + \mathrm{Acc}_{BB} + \ldots + \mathrm{Acc}_{GG}).$$

Voici les contraintes technologiques de ce modèle.

Fin Projet	$x_{24} \leq 100$
Durée A	$-x_1 + x_2 + \mathrm{Acc}_A \geq 7$
Durée B	$-x_2 + x_3 + \mathrm{Acc}_B \geq 9$
Durée C	$-x_2 + x_5 + \mathrm{Acc}_C \geq 4$
Durée D	$-x_3 + x_6 + \mathrm{Acc}_D \geq 12$
Durée E	$-x_2 + x_4 + \mathrm{Acc}_E \geq 12$
Durée F	$-x_6 + x_{10} + \mathrm{Acc}_F \geq 7$
Durée G	$-x_6 + x_{10} + \mathrm{Acc}_G \geq 8$
Durée H	$-x_4 + x_7 \geq 14$
Durée I	$-x_4 + x_8 \geq 7$
Durée J	$-x_4 + x_8 \geq 3$
Durée K	$-x_5 + x_9 \geq 13$
Durée L	$-x_5 + x_9 \geq 14$
Durée M	$-x_5 + x_9 \geq 14$
Durée N	$-x_{10} + x_{12} \geq 2$
Durée O	$-x_7 + x_{13} \geq 9$
Durée P	$-x_8 + x_{11} \geq 10$
Durée Q	$-x_9 + x_{11} \geq 4$
Durée R	$-x_{12} + x_{15} \geq 28$
Durée S	$-x_{11} + x_{14} \geq 5$
Durée T	$-x_{15} + x_{17} \geq 5$
Durée U	$-x_{13} + x_{16} \geq 2$
Durée V	$-x_{14} + x_{24} \geq 8$
Durée W	$-x_{17} + x_{18} \geq 2$
Durée X	$-x_{16} + x_{18} \geq 2$
Durée Y	$-x_{18} + x_{19} \geq 9$
Durée Z	$-x_{19} + x_{20} \geq 2$
Durée AA	$-x_{20} + x_{21} + \mathrm{Acc}_{AA} \geq 4$
Durée BB	$-x_{20} + x_{21} + \mathrm{Acc}_{BB} \geq 3$

Durée CC	$-x_{20} + x_{22} + \text{Acc}_{\text{CC}} \geq 4$	
Durée DD	$-x_{20} + x_{22} + \text{Acc}_{\text{DD}} \geq 2$	
Durée EE	$-x_{21} + x_{23} + \text{Acc}_{\text{EE}} \geq 6$	
Durée FF	$-x_{22} + x_{23} + \text{Acc}_{\text{FF}} \geq 12$	
Durée GG	$-x_{23} + x_{24} + \text{Acc}_{\text{GG}} \geq 5$	
Durée F1	$-x_7 + x_8 \geq 0$	
Durée F2	$-x_{12} + x_{13} \geq 0$	
Durée F3	$-x_{16} + x_{17} \geq 0$	
MaxAccél t	$\text{Acc}_t \leq 1$	t = A, B, C, D, E, F, G, AA, BB, CC, DD, EE, FF, GG.

Le coût z d'accélération minimal est de 700 dollars. Il existe plusieurs solutions optimales; l'une d'elles recommande d'accélérer les tâches D, G, CC, FF et GG de 1 période chacune.

(e) Notons D la longueur du chemin critique mentionné en (c). Conformément à la convention mentionnée à la section 7.5 (voir page 400), on considérera que $P(D < 120)$ constitue un estimé valable de la probabilité pour que la durée du projet soit de moins de 120 périodes. La valeur espérée de la variable D est égale à 105. Et, pourvu que l'on admette l'hypothèse standard que les durées des différentes tâches sont des variables aléatoires indépendantes, l'écart type σ_D est égal à 1,20185 :

$$\text{Var}(D) = 13 \times (\,{}^{2}/_{6}\,)^2 = 13 / 9 = 1{,}20185^2.$$

Il en résulte que

$$P(D < 120) = P\left(\frac{D-\mu_D}{\sigma_D} < \frac{120-105}{1{,}20185}\right) = P(Z < 12{,}48) = 1.$$

Par conséquent, il est presque assuré que le projet durera moins de 120 périodes.

15. Cheminée d'épuration.

L'échéancier optimal pour la firme d'ingénieurs sera déterminé à partir du modèle linéaire suivant. Les variables de décision sont :

v_d = 1 si le projet dure d semaines

x_s = moment où se produit l'événement s

Acc_t = réduction (en semaines) de la durée de la tâche t grâce à l'accélération

C : constante introduite pour tenir compte du coût total à durée normale.

L'objectif consiste à maximiser les revenus nets (en 000 \$) de la firme d'ingénieurs :

$$\text{Max } z = \textit{Honor} - \textit{Coût}$$

où

$Honor = 990\ v_{14} + 910\ v_{15} + 875\ v_{16} + 850\ v_{17} + 835\ v_{18} + 825\ v_{19}$

$Coût = 18\ \text{Acc}_{12} + 28\ \text{Acc}_{23} + 12\ \text{Acc}_{24} + 12\ \text{Acc}_{25} + \ldots + 28\ \text{Acc}_{57} + 21{,}2\ \text{Acc}_{67} + C.$

Voici la liste des contraintes technologiques.

Choix Durée	$v_{14} + v_{15} + v_{16} + v_{17} + v_{18} + v_{19} = 1$
Fin Projet	$14\ v_{14} + 15\ v_{15} + 16\ v_{16} + 17\ v_{17} + 18\ v_{18} + 19\ v_{19} – x_7 = 0$
Durée 1-2	$– x_1 + x_2 + \text{Acc}_{12} \geq 4$
Durée 2-3	$– x_2 + x_3 + \text{Acc}_{23} \geq 5$
Durée 2-4	$– x_2 + x_4 + \text{Acc}_{24} \geq 4$
Durée 2-5	$– x_2 + x_5 + \text{Acc}_{25} \geq 9$
Durée 3-6	$– x_3 + x_6 + \text{Acc}_{36} \geq 5$
Durée 4-6	$– x_4 + x_6 + \text{Acc}_{46} \geq 7$
Durée 5-7	$– x_5 + x_7 + \text{Acc}_{57} \geq 6$
Durée 6-7	$– x_6 + x_7 + \text{Acc}_{67} \geq 4$
MaxAcc12	$\text{Acc}_{12} \leq 2$
MaxAcc 23	$\text{Acc}_{23} \leq 1$
MaxAcc 24	$\text{Acc}_{24} \leq 1$
MaxAcc 25	$\text{Acc}_{25} \leq 1$
MaxAcc 36	$\text{Acc}_{36} \leq 2$
MaxAcc 46	$\text{Acc}_{46} \leq 2$
MaxAcc 57	$\text{Acc}_{57} \leq 1$
MaxAcc 67	$\text{Acc}_{67} \leq 2$
Constante	$C = 440.$

La firme d'ingénieurs devrait n'accélérer aucune tâche et réaliser le projet en 19 semaines. Elle s'assurerait ainsi des revenus nets de 385 000 $.

Note. La constante C représente le coût total (en 000 $) des tâches lorsqu'elles sont exécutées à vitesse normale :

$$C = 50 + 80 + 40 + 50 + 30 + 20 + 100 + 70 = 440.$$

16. Le choix entre deux types de compression.

Définition des variables de décision :

x = durée du projet (en mois)

$v_{td} = 1$ si la tâche t est effectuée selon la durée d

où t = A, B, C, D et d = N(normale), P(pressée), A(accélérée).

Le modèle s'écrit :

Min $z = x$

sous les contraintes suivantes :

Durée A	$v_{AN} + v_{AP} + v_{AA} = 1$
Durée B	$v_{BN} + v_{BP} + v_{BA} = 1$
Durée C	$v_{CN} + v_{CP} + v_{CA} = 1$
Durée D	$v_{DN} + v_{DP} + v_{DA} = 1$
Chemin A-C	$-x + 3\,v_{AN} + 2\,v_{AP} + v_{AA} + 5\,v_{CN} + 4\,v_{CP} + 2\,v_{CA} \leq 0$
Chemin B-D	$-x + 4\,v_{BN} + 3\,v_{BP} + 2\,v_{BA} + 6\,v_{DN} + 5\,v_{DP} + 3\,v_{DA} \leq 0$
Budget	$v_{AN} + 2\,v_{AP} + 4\,v_{AA} + 2\,v_{BN} + 4\,v_{BP} + 6\,v_{BA} + 3\,v_{CN} + \ldots + 6\,v_{DA} \leq 14$
	$v_{td} = 0$ ou 1 pour tout $(t; d)$
	$x \geq 0.$

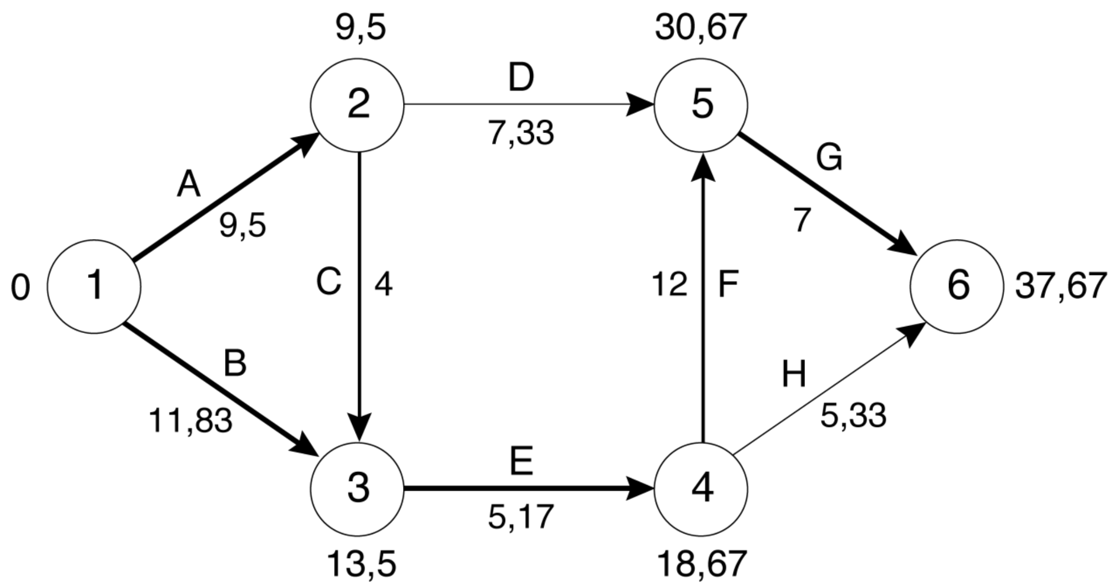
Une solution optimale donne :

$$z = x = 7 \quad \text{et} \quad v_{AP} = v_{BN} = v_{CN} = v_{DA} = 1.$$

La durée minimale du projet, compte tenu du budget, est donc de 7 mois.

17. *PERT*-4.

(a) Un réseau qui représente ce projet est donné ci-dessous (voir page suivante). Conformément à la convention mentionnée précédemment, les moments au plus tôt ont été ajoutés, afin de faciliter le calcul des réponses aux questions subséquentes. Puisque le moment au plus tard de tout sommet coïncide avec le moment au plus tôt correspondant, nous n'avons pas jugé utile de reporter sur le réseau ces moments au plus tard.



(bcd) Soit D_t la durée de la tâche t. Le tableau ci-dessous donne, pour chaque tâche t, la valeur espérée et l'écart type de la variable D_t, les moments espérés au plus tôt et au plus tard, ainsi que la marge.

Tâche	μ_t	σ_t	ES	EF	LS	LF	Marge
A	9,50	1,50	0	9,50	0	9,50	0
B	11,83	0,83	0	11,83	1,67	13,50	1,67
C	4	0,67	9,50	13,50	9,50	13,50	0
D	7,33	1	9,50	16,83	23,33	30,67	13,83
E	5,17	0,50	13,50	18,67	13,50	18,67	0
F	12	1,33	18,67	30,67	18,67	30,67	0
G	7	0,67	30,67	37,67	30,67	37,67	0
H	5,33	0,67	18,67	24	32,33	37,67	13,67

Les tâches critiques sont : A, C, E, F et G.

(e) L'unique chemin critique du projet est : A $\rightarrow$ C $\rightarrow$ E $\rightarrow$ F $\rightarrow$ G. Ainsi :

$$D = D_A + D_C + D_E + D_F + D_G.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} E(D) &= E(D_A) + E(D_C) + E(D_E) + E(D_F) + E(D_G) \\ &= 9{,}5 + 4 + 5{,}167 + 12 + 7 \\ &= 37{,}667; \end{aligned}$$

et, pourvu que les durées des tâches composant le chemin critique soient des variables indépendantes,

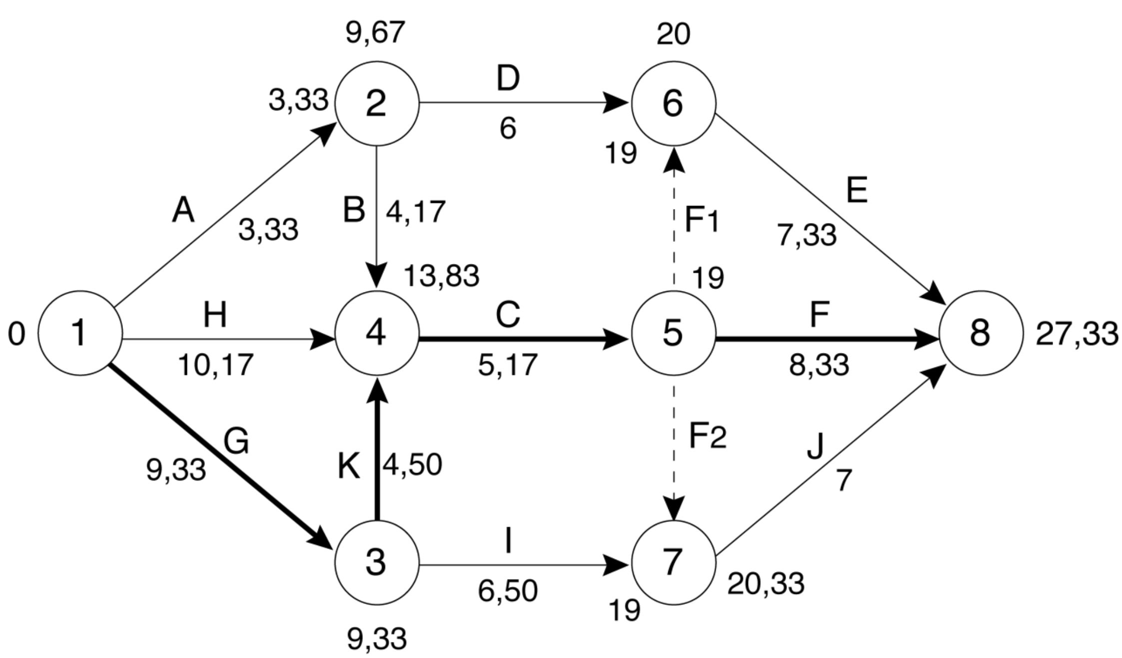
$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(D) &= \mathrm{Var}(D_A) + \mathrm{Var}(D_C) + \mathrm{Var}(D_E) + \mathrm{Var}(D_F) + \mathrm{Var}(D_G) \\ &= 1{,}50^2 + 0{,}67^2 + 0{,}50^2 + 1{,}33^2 + 0{,}67^2 \\ &= 5{,}167 \\ \sigma_D &= \sqrt{5{,}167} = 2{,}273. \end{aligned}$$

(f) Conformément à la convention mentionnée à la section 7.5, la probabilité demandée est estimée en calculant la probabilité pour que la longueur D du chemin critique satisfasse à l'inégalité imposée à la durée du projet.

$$P(D \geq 42) = P\left(\frac{D-\mu_D}{\sigma_D} \geq \frac{42-37{,}667}{2{,}273}\right) = P(Z \geq 1{,}91) = 2{,}8\%$$

18. *PERT*-5.

(a) Un réseau qui représente ce projet est donné ci-dessous. Les durées espérées des différentes tâches ont été reportées sur les arcs correspondants. Les moments espérés au plus tôt et au plus tard des divers sommets ont également été indiqués, pour illustrer les résultats de la question (b).



(b) Les moments espérés au plus tôt et au plus tard sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Sommet		1	2	3	4	5	6	7	8
Moment espéré	**au plus tôt**	0	3,33	9,33	13,83	19	19	19	27,33
	au plus tard	0	9,67	9,33	13,83	19	20	20,33	27,33

(c) L'unique chemin critique de ce projet est : G → K → C → F. Ainsi :

$$D = D_G + D_K + D_C + D_F.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} E(D) &= E(D_G) + E(D_K) + E(D_C) + E(D_F) \\ &= 9{,}33 + 4{,}5 + 5{,}17 + 8{,}33 \\ &= 27{,}33; \end{aligned}$$

et, pourvu que les durées des tâches composant le chemin critique soient des variables indépendantes,

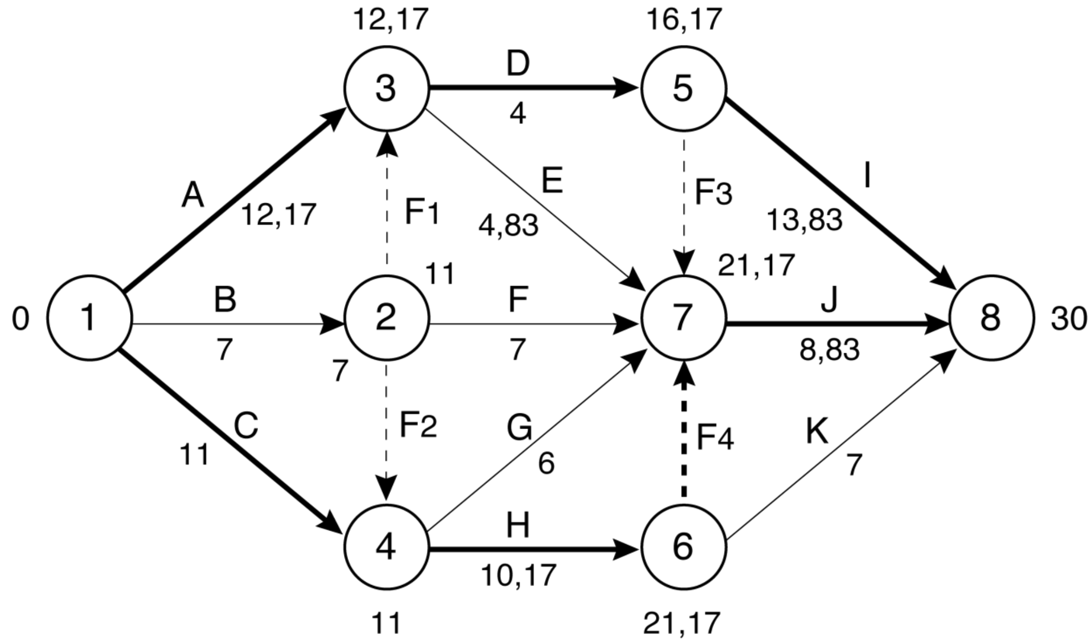
$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(D) &= \mathrm{Var}(D_G) + \mathrm{Var}(D_K) + \mathrm{Var}(D_C) + \mathrm{Var}(D_F) \\ &= (4^2 + 5^2 + 3^2 + 4^2) / 6^2 \\ &= 1{,}833 \\ \sigma_D &= \sqrt{1{,}833} = 1{,}354. \end{aligned}$$

(d) Conformément à la convention mentionnée à la section 7.5, la probabilité demandée est estimée en calculant la probabilité pour que la longueur D du chemin critique satisfasse à l'inégalité imposée à la durée du projet.

$$P(D \geq 30) = P\left(\frac{D-\mu_D}{\sigma_D} \geq \frac{30-27{,}333}{1{,}354}\right) = P(Z \geq 1{,}97) = 2{,}4\%$$

19. *PERT*-6.

(a) Un réseau qui représente ce projet est donné ci-dessous (voir page suivante). Les durées espérées des différentes tâches ont été reportées sur les arcs correspondants. Les moments espérés au plus tôt et au plus tard des divers sommets ont également été indiqués, pour illustrer les résultats de la question (b).



(b) Les moments espérés au plus tôt est au plus tard sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Sommet		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Moment espéré	**au plus tôt**	0	7	12,17	11	16,17	21,17	21,17	30
	au plus tard	0	11	12,17	11	16,17	21,17	21,17	30

(c) Il y a deux chemins critiques. Le premier est : A → D → I. Posons :

$$D_1 = D_A + D_D + D_I \,.$$

Alors

$$\mu_1 = E(D_1) = E(D_A) + E(D_D) + E(D_I) = 30;$$

et, pourvu que les durées des tâches composant ce chemin critique soient des variables indépendantes,

$$\mathrm{Var}(D_1) = \mathrm{Var}(D_A) + \mathrm{Var}(D_D) + \mathrm{Var}(D_I) = (7^2 + 4^2 + 5^2) / 6^2 = 2{,}5$$

$$\sigma_1 = \sqrt{2{,}5} = 1{,}581$$

$$P(D_1 \geq 32) \;=\; P\left(\frac{D_1 - \mu_1}{\sigma_1} \geq \frac{32-30}{1{,}581}\right) \;=\; P(Z \geq 1{,}265) \;=\; 10{,}3\%.$$

Le deuxième chemin critique est : C → H → F4 → J. Posons :

$$D_2 = D_C + D_H + D_{F4} + D_J \,.$$

Alors

$$\mu_2 = E(D_2) = E(D_C) + E(D_H) + E(D_{F4}) + E(D_J) = 30;$$

et, pourvu que les durées des tâches composant le chemin critique soient des variables indépendantes,

$$\text{Var}(D_2) = \text{Var}(D_C) + \text{Var}(D_H) + \text{Var}(D_{F4}) + \text{Var}(D_J) = (4^2 + 3^2 + 0 + 3^2) / 6^2 = 0{,}944$$

$$\sigma_2 = \sqrt{0{,}944} = 0{,}9718$$

$$P(D_2 \geq 32) = P\left(\frac{D_2 - \mu_2}{\sigma_2} \geq \frac{32-30}{0{,}9718}\right) = P(Z \geq 2{,}06) = 2{,}0\%.$$

(d) Selon la convention usuelle, seul le chemin critique dont la variance est la plus élevée est considéré dans les calculs de probabilité concernant la durée du projet. Ici, la probabilité demandée est, selon cette règle, posée égale à 10,3 %.

Note. Pour que le projet soit parachevé en 32 périodes ou plus, il suffit, entre autres, que l'un des deux chemins critiques ait une longueur de 32 périodes ou plus. Par conséquent, la probabilité p demandée est bornée inférieurement par les deux probabilités calculées en (c) :

$$p \geq \max \{ P(D_1 \geq 32) ; P(D_2 \geq 32) \} = \max \{ 10{,}3\ \% ; 2{,}0\ \% \} = 10{,}3\ \%.$$

Il est possible d'améliorer cette borne inférieure. En effet, pourvu que, comme d'habitude, les durées des tâches du projet soient supposées indépendantes, les longueurs D_1 et D_2 des chemins critiques sont des variables indépendantes puisque ces chemins n'ont aucune tâche en commun. Et

$$\begin{aligned} 1 - p &= P(\text{Durée du projet} < 32) \\ 1 - p &\leq P(D_1 < 32 \text{ et } D_2 < 32) \\ &\leq P(D_1 < 32) \times P(D_2 < 32) && D_1 \text{ et } D_2 \text{ indépendantes} \\ &\leq (1 - 0{,}103) \times (1 - 0{,}020) \\ &\leq 0{,}879. \end{aligned}$$

Par conséquent,

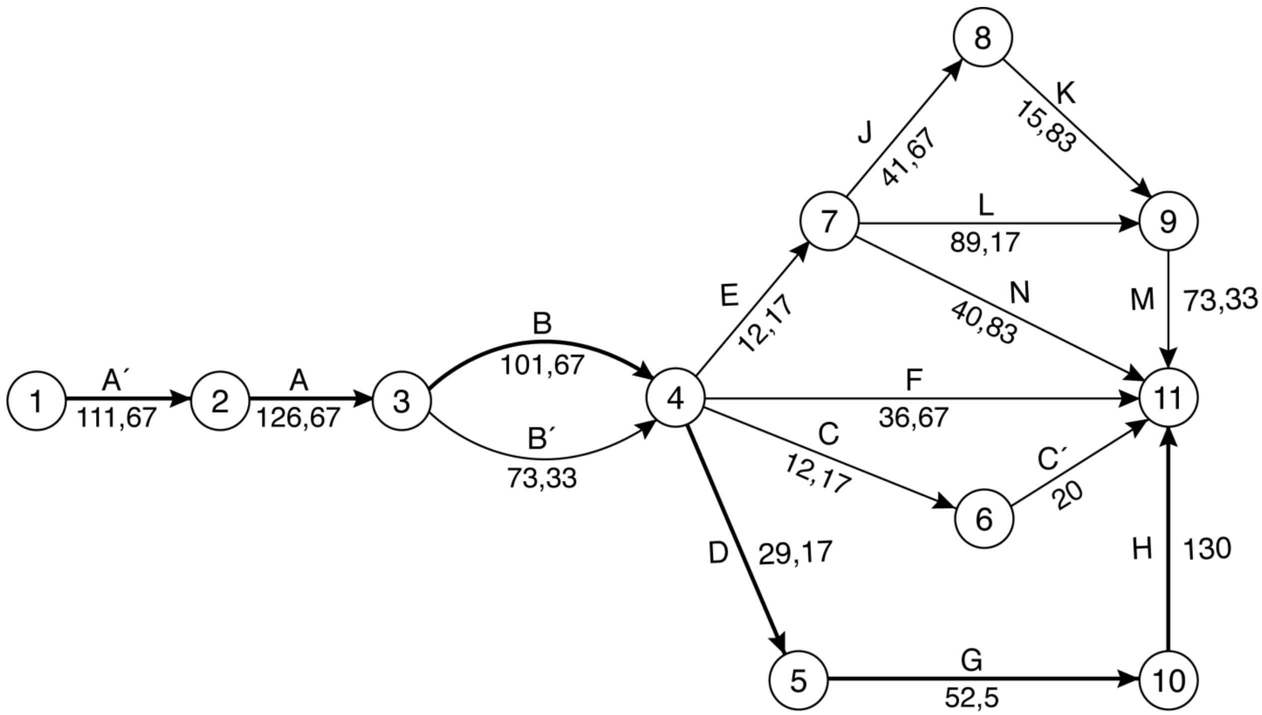
$$p \geq 0{,}121.$$

20. Gisement de kimberlite.

(a) Un réseau qui représente ce projet est donné à la page suivante. Les durées espérées des différentes tâches ont été reportées sur les arcs correspondants. Les moments espérés au plus tôt et au plus tard des divers sommets sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Sommet *s*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
E*(s)*	0	111,67	238,33	340	369,17	352,17	352,17	393,83	441,33	421,67	551,67
L*(s)*	0	111,67	238,33	340	369,17	531,67	389,17	462,50	478,33	421,67	551,67

MOG7-20 Gisement de kimberlite



(b) La durée espérée du projet est de 551,667 jours. L'unique chemin critique est :

$$A' \to A \to B \to D \to G \to H.$$

(c) Soit D, la longueur du chemin critique. La valeur espérée μ_D de D est la somme des durées espérées μ_t des différentes tâches t formant le chemin critique. Il en est de même pour la variance de D, pourvu que, comme d'habitude, les durées des tâches du projet soient supposées indépendantes. Il en résulte que

$$\mu_D = 551{,}667 \text{ et } \sigma_D = 21{,}635.$$

Conformément à la convention mentionnée à la section 7.5 (voir page 400), la probabilité demandée sera estimée en calculant la probabilité pour que la longueur D du chemin critique soit inférieure à 550. Et

$$P(D < 550) \;=\; P\left(\frac{D-\mu_D}{\sigma_D} < \frac{550-551{,}667}{21{,}635}\right) = \; P(Z < -0{,}08) \;=\; 46{,}9\%.$$

(d) Pour abréger le plus possible la durée espérée du projet, il faut accélérer de 10 jours chacune des tâches critiques A', A, B, D, G et H, pour un coût total de 60 000 $. La durée espérée du projet est alors réduite de 60 jours.

Note 1. Il est inutile d'accélérer E ou bien ses successeurs N, L, M, J ou K : en effet, la portion D $\rightarrow$ G $\rightarrow$ H du chemin critique entre les sommets 5 et 12 peut être comprimée de 30 jours au maximum et la marge de E, qui est de 37 jours, est supérieure à cette valeur.

Note 2. On obtient le même résultat en résolvant le modèle linéaire suivant, qui est inspiré du modèle utilisé en section 7.4 (voir figure 7.7, page 394) pour déterminer un programme d'accélération à coût minimal. Les variables de décision sont :

x_j = moment où l'on atteint l'étape j $\qquad j = 1, 2, \ldots, 11$

Acc_t = nombre de jours de réduction de la tâche t.

L'objectif est de minimiser la durée espérée du projet :

$$\text{Min } z = x_{11}.$$

Les contraintes technologiques se regroupent en trois catégories. Il faut d'abord respecter le budget, ce qui revient à limiter à 100 le nombre total de jours de réduction des différentes tâches :

$$\text{Acc}_\text{A} + \text{Acc}_\text{A'} + \text{Acc}_\text{B} + \ldots + \text{Acc}_\text{M} \leq 100.$$

La variable Acc_t est limitée à 10 pour les 12 tâches pour lesquelles l'accélération est permise, et à 0 pour les 4 autres :

$\text{Acc}_t \leq 10 \qquad t$ = A, A', B, B', D, E, G, H, J, K, L, M

$\text{Acc}_t \leq 0 \qquad t$ = C, C', F, N.

Enfin, l'écart entre les sommets initial et terminal d'une tâche $t : i \rightarrow j$ doit être suffisant pour permettre son parachèvement; techniquement, on convient d'exiger que cet écart ne soit pas inférieur à la durée espérée, après accélération, de la tâche :

$$x_j - x_i \geq \mu_t - \text{Acc}_t,$$

ce qui se récrit :

$$-x_i + x_j + \text{Acc}_t \geq \mu_t.$$

Par exemple, l'inéquation associée à la tâche A prend la forme :

$$-x_2 + x_3 + \text{Acc}_\text{A} \geq 126{,}67.$$

Avec un budget de 100 000 \$, la durée espérée minimale du projet est de 491,667 jours. Il existe plusieurs solutions optimales, dont les dépenses d'accélération varient de 60 à 100 milliers de dollars. Dans l'esprit de la méthode hiérarchique décrite au chapitre 6, on ajoute une contrainte fixant la durée du projet au minimum trouvé précédemment et on cherche à minimiser le budget dépensé. On obtient alors la solution décrite ci-dessus.

(e) On accélère d'abord les tâches critiques A', A et B de 15 jours chacune, ce qui réduit de 45 jours la durée espérée minimale du projet. On accélère ensuite D, G et H de 15 jours chacune : en diminuant ainsi de 45 jours la portion D $\rightarrow$ G $\rightarrow$ H du chemin critique, on annule la marge de 37 jours de E et il manque 8 jours pour faire le compte; afin de gagner ces 8 jours additionnels entre les sommets 5 et 12, on doit raccourcir de 8 jours le chemin le plus long entre 5 et 12, qui est alors E $\rightarrow$ L $\rightarrow$ M. On réduira donc les tâches E, L ou M d'un total de 8 jours, aucune d'entre elles ne devant cependant être écourtée de plus de 5 jours. Le coût total de compression s'élève alors à 263 000 $:

$$6 \times \textbf{(} (5 \times 1\,000) + (5 \times 2\,500) + (5 \times 5\,000) \textbf{)} + (8 \times 1\,000) = 263\,000.$$

Cette somme de 263 000 $ permet de réduire de 90 jours la durée espérée du projet.

Note. On obtient le même résultat en résolvant un modèle linéaire analogue à celui utilisé dans la note 2 de la question (d). La décision reliée à l'accélération de la tâche t exige trois variables Acc_{t1}, Acc_{t2} et Acc_{t3} ainsi définies :

$$\mathrm{Acc}_{th} \;=\; \text{nombre de jours de réduction de la tâche } t \text{ au coût de } c_h \text{ milliers de dollars,}$$

où $c_1 = 1$ et $c_2 = 2{,}5$ et $c_3 = 5$. La contrainte de budget s'écrit cette fois :

$$1\,(\Sigma_t\, \mathrm{Acc}_{t1}) + 2{,}5\,(\Sigma_t\, \mathrm{Acc}_{t2}) + 5\,(\Sigma_t\, \mathrm{Acc}_{t3}) \;\leq\; 650.$$

Enfin, les inéquations indiquant les bornes supérieures des variables Acc_{th} prennent la forme suivante :

$$\mathrm{Acc}_{th} \;\leq\; 5 \qquad t = \text{A, A', B, B', D, E, G, H, J, K, L, M et tout } h$$

$$\mathrm{Acc}_{th} \;\leq\; 0 \qquad t = \text{C, C', F, N et tout } h.$$

Ce modèle admet plusieurs solutions optimales. Comme dans la note 2 de la question (d), on utilise la méthode hiérarchique pour sélectionner, parmi ces solutions optimales, l'une de celles qui minimisent les dépenses d'accélération. On retrouve alors qu'une somme de 263 000 $ permet de réduire de 90 jours la durée espérée du projet.

21. Vérification comptable.

(a) Un réseau qui représente ce projet est donné ci-dessous (voir page suivante). Les durées espérées des différentes tâches ont été reportées sur les arcs correspondants. Les moments espérés au plus tôt et au plus tard des divers sommets sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Sommet *s*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
E(s)	0	12,67	43,5	68,17	65,5	68,17	79,17	208,17	94,17
L(s)	0	12,67	43,5	68,17	190,5	188,83	199,83	208,17	214,83
Sommet *s*	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	
E(s)	208,17	238,17	222,17	238,17	238,17	259	283	289	
L(s)	221,17	238,17	235,17	238,17	258	259	283	289	

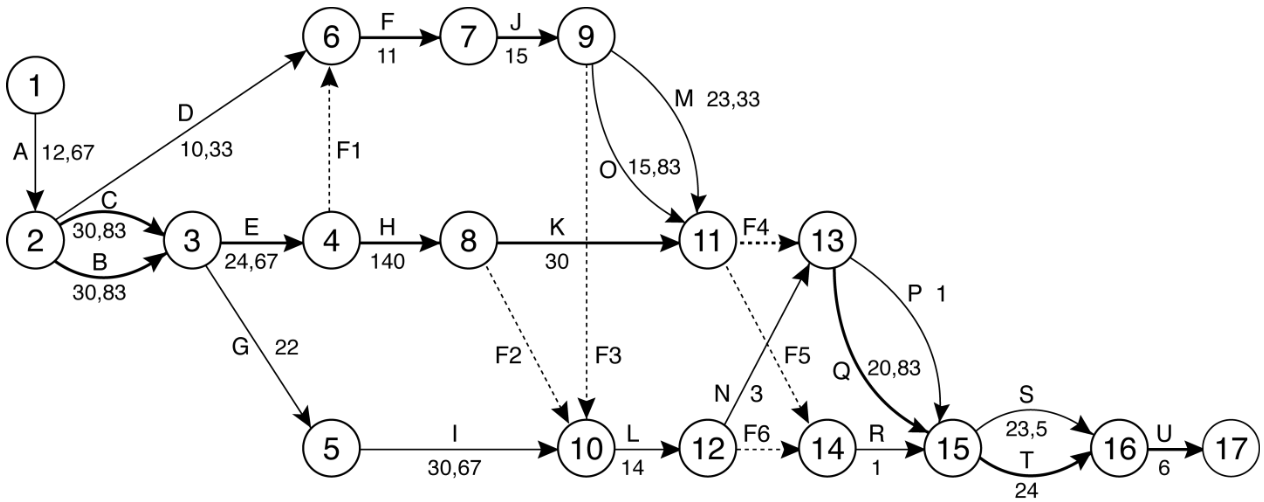
(b) La durée espérée du projet est de 289 heures. Il existe deux chemins critiques, qui ne diffèrent que par la présence des tâches B ou C au 2^{e} rang :

$$\text{A} \rightarrow \text{B} \rightarrow \text{E} \rightarrow \text{H} \rightarrow \text{K} \rightarrow \text{F4} \rightarrow \text{Q} \rightarrow \text{T} \rightarrow \text{U}$$

et

$$\text{A} \rightarrow \text{C} \rightarrow \text{E} \rightarrow \text{H} \rightarrow \text{K} \rightarrow \text{F4} \rightarrow \text{Q} \rightarrow \text{T} \rightarrow \text{U}.$$

MOG7-21 Vérification comptable



(c) Non. En diminuant de moitié les trois durées associées à la tâche H, on raccourcit de moitié sa durée espérée, qui est de 140 heures. Ce qui réduit la durée espérée du chemin critique de 70 heures.