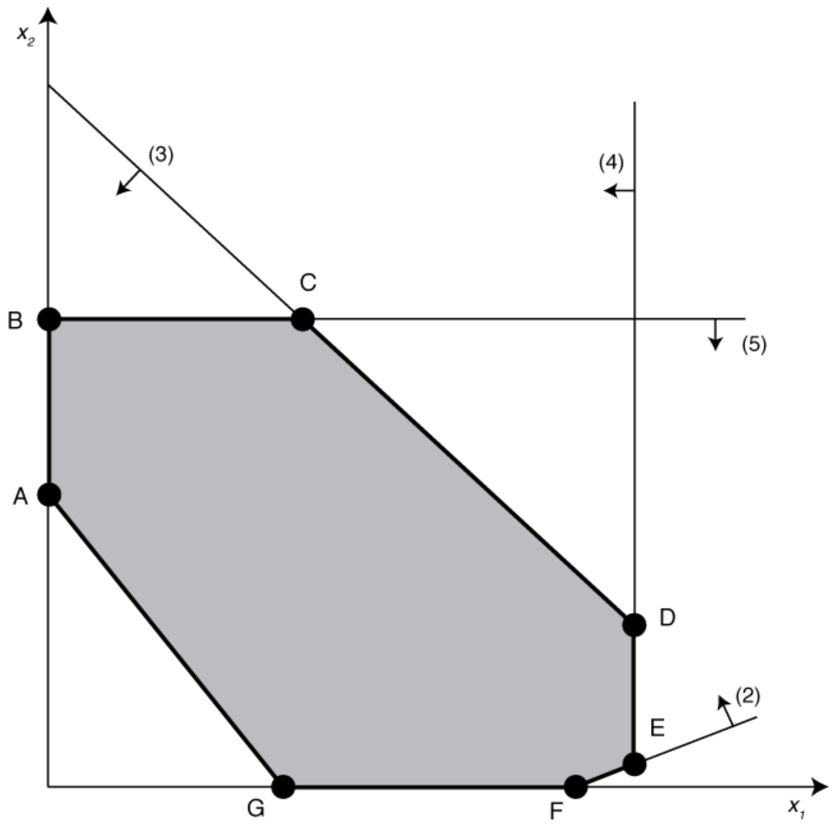
Chapitre 6 – Solutions des problèmes

1. Optimums de Pareto d'un modèle abstrait.

(a) L'ensemble *ADM* des solutions admissibles est le polygone ABCDEFG illustré dans la figure ci-dessous.



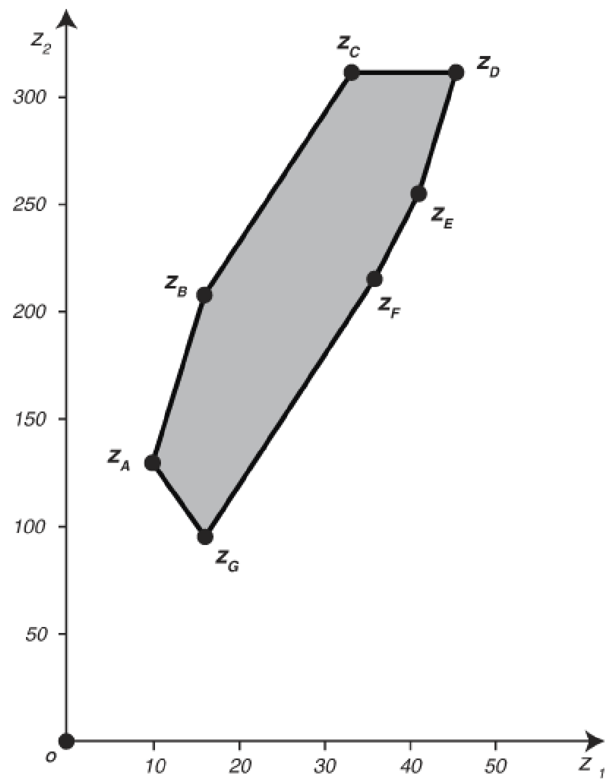
(b) Les coordonnées des points extrêmes de *ADM* sont données au tableau suivant.

Point extrême	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
Coordonnées	(0; 5)	(0; 8)	(4,333; 8)	(10; 2,769)	(10; 0,556)	(9; 0)	(4; 0)

(c) Le tableau suivant indique les valeurs prises par les fonctions-objectifs z_1 et z_2 en chacun des points extrêmes de l'ensemble *ADM*.

Point extrême	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
z_1	10	16	33,333	45,538	41,111	36	16
z_2	130	208	312	312	254,444	216	96

L’ensemble *EVO* des valeurs de z_1 et z_2 pour les solutions de *ADM* est illustré ci-après. Exceptionnellement, nous avons utilisé des unités différentes pour les deux axes, afin d'obtenir un graphique moins étriqué.



(d) Le seul optimum de Pareto de ce modèle est le point D = (10; 2,769).

2. La méthode hiérarchique appliquée à un modèle abstrait.

(a) Le point D = (10; 2,769) est l'unique point où la fonction-objectif z_1 atteint sa valeur maximale $z_1^* = 45{,}538$ (voir problème 1(c)). Il restera évidemment l’unique solution optimale lorsqu'on ajoute au modèle la contrainte supplémentaire « $z_1 = 45{,}538$ » et que l'on cherche à maximiser z_2.

(b) La valeur maximale $z_2^* = 312$ est atteinte aux sommets C et D (voir problème 1(c)). Toutefois, seul D maximise z_1 lorsque z_2 est fixée à la valeur 312.

En conclusion, quel que soit l’ordre suivi, la méthode hiérarchique conduit au point D comme unique solution optimale. Ce résultat était prévisible, car D est l’unique optimum de Pareto.

3. La méthode de pondération appliquée à un modèle abstrait.

(a) La fonction-objectif z s'écrit :

$$z = [\,4\,x_1 + 2\,x_2\,] + w\,[\,24\,x_1 + 26\,x_2\,] = (4 + 24\,w)\,x_1 + (2 + 26\,w)\,x_2.$$

(b) Lorsque $w = 0{,}5$, la fonction-objectif z s'écrit : $z = 16\,x_1 + 15\,x_2$. Et alors, z atteint sa valeur maximale 201,538 quand $(x_1\,;\,x_2) = (10;\,2{,}769)$.

(c) Dans les trois cas, la solution obtenue est la même, car le modèle admet un seul optimum de Pareto.

4. Un problème abstrait comportant 3 variables et 3 objectifs.

(a) Le tableau suivant décrit les trois solutions optimales obtenues et indique les valeurs prises par les fonctions-objectifs z_1, z_2 et z_3 en chacune de ces solutions.

Objectif	x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	z_3
z_1	0	5	35	290	180	305
z_2	35	5	0	150	215	235
z_3	0	16,67	0	150	16,67	316,67

(b) La fonction-objectif z s'écrit :

$$z = [\,3\,x_1 + 9\,x_2 + 7\,x_3\,] + w_2\,[\,6\,x_1 + 1\,x_2 + 5\,x_3\,] + w_3\,[\,4\,x_1 + 19\,x_2 + 6\,x_3\,]$$
$$= (3 + 6\,w_2 + 4\,w_3)\,x_1 + (9 + 1\,w_2 + 19\,w_3)\,x_2 + (7 + 5\,w_2 + 6\,w_3)\,x_3.$$

(c) Lorsque $w_2 = 2$ et $w_3 = 4$, la fonction-objectif z s'écrit : $z = 31\,x_1 + 87\,x_2 + 41\,x_3$. Et alors, z atteint sa valeur maximale 1870 quand $(x_1\,;\,x_2\,;\,x_3) = (0;\,5;\,35)$.

(d) Nous ajoutons au modèle de l'énoncé des variables de déviation d_h^+ et d_h^- (où $h = 1, 2, 3$), ainsi qu'une variable $D_{\max}$ qui représentera la valeur maximale des 6 variables de déviation.

L'objectif vise essentiellement à minimiser la valeur de $D_{\max}$. Mais, comme on cherche à éviter que les deux variables de déviation d_h^+ et d_h^- associées à un même critère soient non nulles en même temps, on pénalisera – faiblement – les variables de déviation. Plus précisément, l'objectif consistera à minimiser z, où

$$z = d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_2^+ + d_3^- + d_3^+ + 1000\, D_{\max}.$$

Les contraintes technologiques du modèle forment trois groupes.

- Il faut d'abord reprendre les 4 inéquations de l'énoncé.
- Il faut ensuite définir les variables de déviation :

$$3\, x_1 + 9\, x_2 + 7\, x_3 + d_1^- - d_1^+ = 260$$
$$6\, x_1 + 1\, x_2 + 5\, x_3 + d_2^- - d_2^+ = 200$$
$$4\, x_1 + 19\, x_2 + 6\, x_3 + d_3^- - d_3^+ = 300.$$

- Il faut enfin s'assurer que $D_{\max}$ est supérieure à toutes les variables de déviation :

$$D_{\max} \geq d_h^- \qquad h = 1, 2, 3$$
$$D_{\max} \geq d_h^+ \qquad h = 1, 2, 3.$$

La valeur minimale de $D_{\max}$ est 11,67. Le tableau suivant décrit une solution optimale.

h	x_h	z_h	d_h^-	d_h^+
1	8,33	256,67	3,33	0
2	5	188,33	11,67	0
3	26,67	288,33	11,67	0

(e) Nous reprenons les variables du modèle précédent, sauf $D_{\max}$. Les contraintes technologiques sont celles des deux premiers groupes de ce modèle. L'objectif s'écrit :

$$\text{Min } z = d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_2^+ + d_3^- + d_3^+.$$

La valeur minimale de z est 22,5. Le tableau suivant décrit une solution optimale.

h	x_h	z_h	d_h^-	d_h^+
1	7,5	260	0	0
2	5	187,5	12,5	0
3	27,5	290	10	0

5. Les pommes de terre.

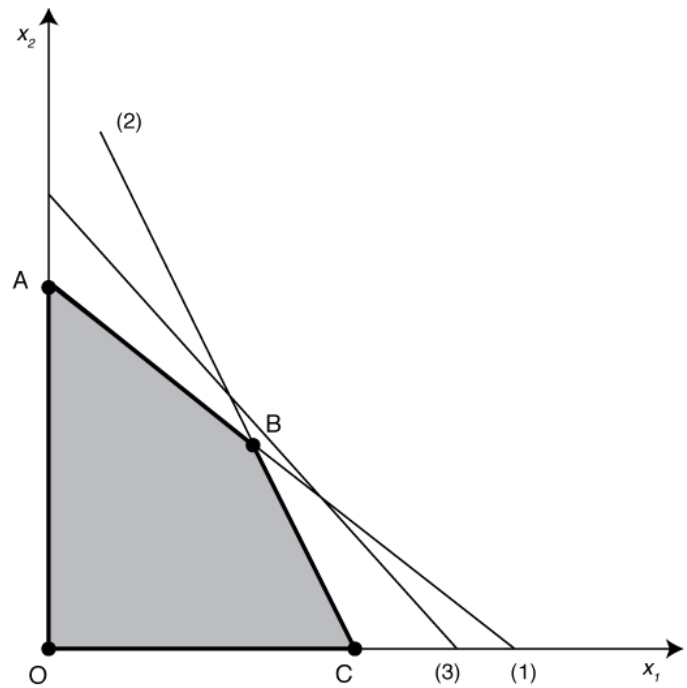
(a) Voici les trois inéquations demandées.

Frites $\quad 0{,}200\, x_1 + 0{,}250\, x_2 \leq 18\,000 \quad$ (1)

Juliennes $\quad 0{,}200\, x_1 + 0{,}100\, x_2 \leq 12\,000 \quad$ (2)

Flocons $\quad 0{,}300\, x_1 + 0{,}270\, x_2 \leq 24\,000. \quad$ (3)

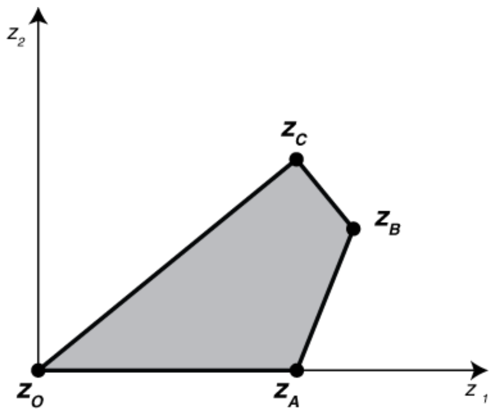
(b) L'ensemble *ADM* est le polygone OABC de la figure ci-dessous. Les coordonnées des sommets sont données dans le tableau de la question (c).

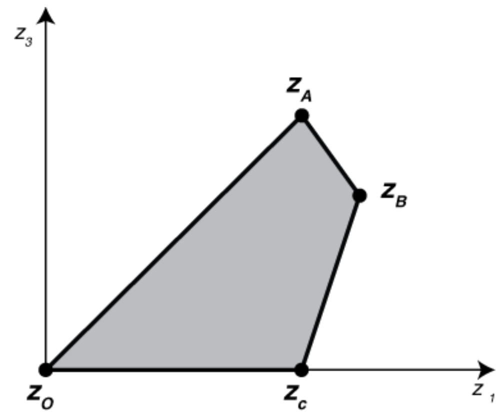


(c) La fonction-objectif représentant le profit s'écrit : $z_1 = 1{,}2\ x_1 + x_2$. Le tableau suivant donne les valeurs des trois fonctions-objectifs pour les différents sommets de l'ensemble *ADM*. On constate que chacune des z_h admet un seul optimum. Noter que le sommet A, qui est la meilleure solution si on retient le 3^e^ critère, est dominé par B selon les deux autres objectifs; que, de même, C est dominé par B selon z_1 et z_3.

Point	x1	x2	z1	z2	z3
O	0	0	0	0	0
A	0	72 000	72 000	0	**72 000**
B	40 000	40 000	**88 000**	40 000	40 000
C	60 000	0	72 000	**60 000**	0

(de) Les graphiques demandés sont reproduits ci-dessous à gauche (d) et à droite (e) Les coordonnées des points extrêmes z_P sont donnés dans le tableau de la question (c).





(f) Le graphique demandé est identique à celui donné en question (b), car les points P de *ADM* et z_P de *EVO* coïncident quand les fonctions-objectifs utilisées sont $z_2 = x_1$ et $z_3 = x_2$.

(g) Le modèle pertinent comprend les variables x_1 et x_2 de la question (a), des variables de déviation d_h^+ et d_h^- (où $h = 2, 3$), ainsi qu'une variable D_{max} qui représentera la valeur maximale des quatre variables de déviation.

L'objectif vise essentiellement à minimiser la valeur de D_{max}. Mais, comme on cherche à éviter que les deux variables de déviation d_h^+ et d_h^- associées à un même critère soient non nulles en même temps, on pénalisera – faiblement – les variables de déviation. Plus précisément, l'objectif consistera à minimiser z, où

$$z = 0{,}00001\, d_2^- + 0{,}00001\, d_2^+ + 0{,}00001\, d_3^- + 0{,}00001\, d_3^+ + D_{max}.$$

Les contraintes technologiques du modèle forment trois groupes.

- Il faut d'abord reprendre les trois inéquations de la question (a).
- Il faut ensuite définir les variables de déviation :

$$x_1 + d_2^- - d_2^+ = 50\,000$$
$$x_2 + d_3^- - d_3^+ = 55\,000.$$

- Il faut enfin s'assurer que D_{max} est supérieure à toutes les variables de déviation :

$$D_{max} \geq d_h^- \qquad h = 2, 3$$
$$D_{max} \geq d_h^+ \qquad h = 2, 3.$$

La valeur minimale de D_{max} est 12 778. Le tableau suivant décrit une solution optimale.

h	x_h	z_h	d_h^-	d_h^+
1	37 222			
2	42 222	37 222	12 778	0
3		42 222	12 778	0

(h) Nous considérons d'abord le modèle consistant à maximiser

$$z_4 = x_1 + x_2$$

sous les trois contraintes de la question (a), ainsi que les contraintes de non-négativité usuelles. Une solution optimale est obtenue en posant : $x_1 = x_2 = 40\,000$. En principe, il faudrait maintenant maximiser le profit z_1 en ajoutant au modèle précédent la contrainte

$$x_1 + x_2 = 80\,000.$$

Mais cette étape est inutile dans le présent contexte : en effet, la solution $(x_1 ; x_2) = (40\,000 ; 40\,000)$ correspond au sommet B, qui est l'optimum de z_1, même en l'absence de l'exigence que l'objectif z_4 soit fixé à son maximum de 80 000.

6. Les affiches de Vunéon.

(a) Voici les trois inéquations demandées.

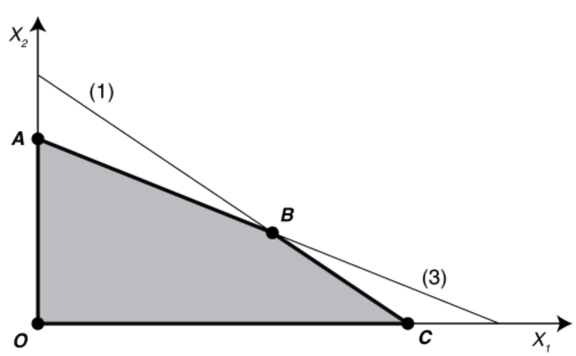
Séparation	$x_1 + 1{,}5\,x_2 \leq 800$	(1)
Montage	$0{,}50\,x_1 + x_2 \leq 2\,500$	(2)
Contrôle	$0{,}04\,x_1 + 0{,}1\,x_2 \leq 40.$	(3)

(b) La figure de gauche ci-dessous donne la région admissible du modèle linéaire continu comprenant les trois inéquations de la question (a), ainsi que les contraintes de non-négativité usuelles. La contrainte « Montage » n'est pas représentée sur le graphique, car elle est évidemment redondante : considérons, en effet, un point $(x_1; x_2)$ du 1er quadrant qui satisfait à la première contrainte technologique; alors

$$0{,}50\,x_1 + x_2 \leq x_1 + 1{,}5\,x_2 \leq 800 \leq 2\,500,$$

la 1re inéquation découlant de la non-négativité des variables x_1 et x_2; ainsi, le temps exigé par ce plan de production $(x_1; x_2)$ n'excède pas les 2 500 heures disponibles dans l'atelier de montage.

D'après les résultats de la colonne z_1 du tableau de droite, tous les points du segment [B; C] dont les deux coordonnées sont entières optimisent la fonction-objectif $z_1 = 500\,x_1 + 750\,x_2$.



Point	x_1	x_2	z_1	z_2
O	0	0	0	0
A	0	400	300 000	**24 000**
B	500	200	**400 000**	22 000
C	800	0	**400 000**	16 000

(c) D'après les résultats de la colonne z_2 du tableau ci-dessus, le point A est l'unique optimum de la fonction-objectif $z_2 = 20\,x_1 + 60\,x_2$.

(d) Considérons tour à tour chacun des deux ordres possibles.

- z_1 suivie de z_2. Il s'agit de résoudre le modèle PLTE dont l'objectif est de maximiser z_2 et dont les contraintes technologiques sont les trois inéquations de la question (a), ainsi que l'équation suivante, qui fixe le profit hebdomadaire z_1 à sa valeur optimale 400 000 :

$$500\,x_1 + 750\,x_2 = 400\,000.$$

  On obtient l'optimum de Pareto $(x_1\,;\,x_2) = (500;\,200)$ pour lequel $z_1 = 400\,000$ et $z_2 = 22\,000$.

- z_2 suivie de z_1. Cette fois, le modèle initial – dont l'objectif est de maximiser z_2 – admet une seule solution optimale, qui correspond au sommet A = (0; 400) de la figure ci-dessus. Par conséquent, dans le second modèle où l'on fixe l'impact z_2 des affiches à sa valeur optimale, $(x_1\,;\,x_2) = (0;\,400)$ est la seule solution admissible et donc la solution optimale. Le profit hebdomadaire découlant de cet optimum de Pareto est de 300 000 dollars.

Choisir entre ces deux optimums de Pareto revient à arbitrer entre un profit hebdomadaire additionnel de 100 000 dollars et un impact additionnel de 2 000 personnes.

(e) La fonction-objectif z s'écrit :

$$z = [500\,x_1 + 750\,x_2\,] + w\,[20\,x_1 + 60\,x_2\,] = (500 + 20\,w)\,x_1 + (750 + 60\,w)\,x_2.$$

Le coefficient w représente la diminution du profit hebdomadaire que la direction de Vunéon serait prête à accepter pour obtenir que l'impact total des affiches augmente de 1 personne.

(f) Lorsque w est positif et petit, la portion z_1 est prépondérante et la fonction-objectif z atteint son maximum au sommet B = (500; 200). Mais, une valeur élevée de w favorise le sommet A = (0; 400) dont la 2^{e} coordonnée est la plus grande. La valeur critique w_c où A devient l'optimum s'obtient en résolvant l'équation d'équilibre « $z_A = z_B$ », qui se récrit :

$$300\,000 + 24\,000\,w_c = 400\,000 + 22\,000\,w_c.$$

Il vient : $w_c = 50$.

Note. Le lecteur trouvera dans la feuille (g) du fichier MOG6-06.xlsx un tableau où sont calculées, en fonction de w, les valeurs de z en chacun des sommets O, A, B et C. Il constatera que l'unique optimum de z est B quand $0 < w < 50$, et A quand $w > 50$. Lorsque $w = 50$, les sommets A et B, et par conséquent tous les points du segment [A; B], donnent à z la même valeur 1 500 000.

7. Un plan d'affaires.

(a) Le modèle comporte 8 variables de décision binaires définies de la façon suivante :

$$v_j = 1 \text{ si l'on retient le site } j$$

où $j = 1, 2, \dots, 8$. L'objectif consiste à minimiser le nombre z de sites retenus, où

$$z = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8.$$

Les contraintes technologiques, qui sont au nombre de 18, une par ville, exigent que chaque ville soit desservie par au moins un site. Voici celles associées aux villes A et J :

Ville A $\quad v_1 + v_6 \geq 1$

Ville J $\quad v_1 + v_4 + v_5 + v_6 \geq 1.$

Les sites 2, 4, 6 et 7 suffisent pour rejoindre tous les foyers de la région visée. Le coût total de cette solution est de 1,4 + 2,3 + 2,4 + 2,3 = 8,4 millions de dollars.

(b) Il suffit d'adjoindre au modèle la contrainte « $v_2 + v_4 + v_6 + v_7 \leq 3$ ». La solution optimale du modèle augmenté indique qu'il faut alors au moins 5 sites pour assurer une couverture universelle.

(c) On reprend le modèle de la première question, mais avec les modifications suivantes. D'abord, on ajoute une variable binaire v_9, qui prend la valeur 1 si l'on retient le site 9. La fonction-objectif à minimiser, s'écrit maintenant :

$$z = 1{,}5\, v_1 + 1{,}4\, v_2 + 2{,}1\, v_3 + \dots + 2{,}4\, v_8 + c\, v_9.$$

Les contraintes technologiques, qui sont toujours au nombre de 18, une par ville, exigent encore que chaque ville soit desservie par au moins un site. Mais, celles qui sont associées aux 5 villes pouvant être desservies par le 9e site sont modifiées pour tenir compte de cette possibilité. Par exemple, l'inéquation «Ville A» s'écrit maintenant de la façon suivante :

Ville A $\quad v_1 + v_6 + v_9 \geq 1.$

Pour déterminer le coût minimal en l'absence et en présence du site 9, il suffit de poser successivement $c = 10$ et $c = 0$. Dans le 1er cas, on obtient la solution de la question (a) et un coût de 8,4 M$; dans le second, l'investissement minimal est de 6,0 M$. Le montant maximal que Webprice serait prête à investir dans l'emplacement additionnel est l'écart 8,4 – 6,0 = 2,4 millions de dollars.

(d) Aux 8 variables v_j déjà introduites, il faut ajouter les 4 variables de déviation, ainsi que des variables binaires w_X définies de la façon suivante :

$$w_X = 1 \text{ si la ville } X \text{ est desservie par au moins un site}$$

où $X = A, B, \dots, R$. Notons que l'objectif z_F sur le nombre de foyers desservis s'écrit :

$$\text{Max} \quad z_F = 24\,500\, w_A + 32\,300\, w_B + 28\,200\, w_C + \dots + 26\,800\, w_R$$

tandis que celui associé au budget s’écrit :

$$\text{Min} \quad z_B = 1{,}5\ v_1 + 1{,}4\ v_2 + 2{,}1\ v_3 + \ldots + 2{,}4\ v_8.$$

On pose *a priori* que les pénalités des déviations d_F^+ et d_B^- sont nulles, car Webprice et la société de capital de risque ne désirent sûrement pas pénaliser le fait que le nombre de foyers desservis dépasse la cible fixée, ni le fait que le budget requis soit inférieur à la cible. De plus, la condition de l’énoncé signifie que le coefficient de d_B^+ est 100 000 fois plus élevé que celui de d_F^-. Convenons de prendre ce dernier comme point de référence et de le poser égal à 1. L’objectif s’écrit donc :

$$\text{Min} \ \ z = d_F^- + 100\,000\ d_B^+.$$

Les contraintes technologiques se regroupent en trois catégories.

- La première, qui comporte 18 inéquations, une par ville, force la variable w_X à être nulle, à moins qu’au moins l’un des sites pouvant desservir la ville X soit retenu. Voici les inéquations associées aux villes A et J :

  Ville A $\qquad w_A \leq v_1 + v_6$

  Ville J $\qquad w_J \leq v_1 + v_4 + v_5 + v_6.$

- La seconde se limite à une équation exigeant que l’on retienne deux sites :

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 = 2.$$

- La 3^e et dernière catégorie relie les variables de déviation aux variables w_X et v_j.

$$24\,500\ w_A + 32\,300\ w_B + 28\,200\ w_C + \ldots + 26\,800\ w_R + d_F^- - d_F^+ = 250\,000$$

$$1{,}5\ v_1 + 1{,}4\ v_2 + 2{,}1\ v_3 + \ldots + 2{,}4\ v_8 + d_B^- - d_B^+ = 3{,}5.$$

Enfin, les w_X et v_j sont des variables binaires et les variables de déviation d_F^-, d_F^+, d_B^- et d_B^+ sont non négatives.

Une solution optimale recommande à Webprice de s’implanter sur les sites 2 et 4. Les villes B, C, E, G, H, I, J, L, O, P et Q seront desservies, ce qui signifie que 258 700 foyers seront rejoints, soit 8 700 foyers au-delà de la cible. Le budget requis dépassera de 200 000 dollars la cible de 3,5 M$.

8. Le gestionnaire d’une caisse de retraite

(a) Le modèle comprend des variables v_j et x_j définies de la façon suivante :

$$v_j = 1 \ \text{ si le gestionnaire retient le titre numéro } j$$

$$x_j = \text{montant (en M\$) investi par le gestionnaire dans le titre numéro } j.$$

où $j = 1, \ldots, 16$. L’objectif consiste à maximiser le revenu net espéré z_1, où

$$z_1 = 0{,}0420\ x_1 + 0{,}0418\ x_2 + 0{,}0405\ x_3 + \ldots + 0{,}0450\ x_{16}\,.$$

Les contraintes technologiques forment trois groupes.

- L'investissement dans un titre doit respecter le minimum de 2 M\$ et le maximum de 10 M\$:

$$2\,v_j \le x_j \le 10\,v_j \qquad j = 1, 2, \ldots, 16. \qquad (1)$$

- Le total des sommes investies doit coïncider avec le capital à la disposition du gestionnaire :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{16} = 50. \qquad (2)$$

- Le gestionnaire doit respecter les quatre règles de diversification qu'il s'est fixées :

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_8 \ge 25 \qquad (3)$$

$$x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \le 10 \qquad (4)$$

$$v_2 + v_7 + v_8 \le 2 \qquad (5)$$

$$2v_1 + v_4 + v_5 \le 2. \qquad (6)$$

Le tableau ci-dessous décrit une solution optimale, dont le rendement espéré est de 2 159 000 dollars; la 1re ligne donne le numéro du titre retenu et la seconde, le montant investi (en M\$) dans ce titre.

j	2	4	5	10	11	14
x_j	5	10	10	5	10	10

(b) On pose *a priori* que les pénalités des déviations d_1^+ et d_2^- sont nulles, car le gestionnaire ne désire sûrement pas pénaliser le fait que le revenu dépasse la cible fixée, ni le fait que le risque soit inférieur à la cible. Voici le modèle pour la méthode d'optimisation par objectifs.

Min $z = 20\,d_1^- + d_2^+$

sous les contraintes (1) à (6) et les contraintes additionnelles suivantes :

$$0{,}0420\,x_1 + 0{,}0418\,x_2 + 0{,}0405\,x_3 + \ldots + 0{,}0450\,x_{16} + d_1^- - d_1^+ = 2{,}150$$

$$27\,x_1 + 30\,x_2 + 42\,x_3 + \ldots + 52\,x_{16} + 50\,d_2^- - 50\,d_2^+ = 1800$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_{16}, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \ge 0$$

$$v_1, v_2, \ldots, v_{16} \text{ binaires.}$$

Le tableau ci-dessous décrit une solution optimale, dont le rendement espéré est de 2 144 167 dollars et l'indice global de risque de 36 points.

j	2	4	5	10	12	13
x_j	10	10	5	9	6	10

9. Les vendeurs de FÉÉ.

(a) Le modèle d'affectation de FÉÉ repose sur des variables binaires v_{ij} (i = 1, 2, 3, 4, 5 et j = 1, 2, 3, 4, 5) définies de la façon suivante :

$$v_{ij} = 1 \quad \text{si le candidat } i \text{ est affecté à la succursale } j.$$

Comme chaque candidat doit être placé dans une et une seule succursale et que chaque succursale doit recevoir un seul candidat, la somme s_i des variables de la ligne E_i, de même que le total t_j des variables de la colonne T_j, doivent être égaux à 1, quelle que soit la rangée considérée (voir p. 82-83) :

$$v_{i1} + v_{i2} + v_{i3} + v_{i4} + v_{i5} = 1 \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$v_{1j} + v_{2j} + v_{3j} + v_{4j} + v_{5j} = 1 \qquad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Le premier objectif consiste à minimiser les coûts de déplacement z_1, où

$$z_1 = 1030\, v_{11} + 1157\, v_{12} + \ldots + 1200\, v_{23} + \ldots + 1305\, v_{55}.$$

Le tableau suivant décrit les affectations d'une solution optimale; le coût minimal de déplacement est de 6 141 dollars.

Candidat	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Succursale	1	3	2	5	4

(b) Il s'agit cette fois de maximiser l'adaptabilité z_2, où

$$z_2 = 55\, v_{11} + 66\, v_{12} + \ldots + 67\, v_{23} + \ldots + 80\, v_{55}.$$

Le tableau suivant décrit les affectations d'une solution optimale; la somme maximale des cotes d'adaptabilité est 416.

Candidat	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Succursale	3	2	4	5	1

(c) Enfin, on se donne comme objectif de maximiser le volume des ventes z_3, où

$$z_3 = 8200\, v_{11} + 6500\, v_{12} + \ldots + 8900\, v_{23} + \ldots + 9500\, v_{55}.$$

Le tableau suivant décrit les affectations d'une solution optimale; le volume maximal des ventes est 44 200 dollars.

Candidat	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Succursale	4	3	1	2	5

(d) Le tableau ci-dessous donne les valeurs optimales des fonctions-objectifs dans les différents modèles considérés. Noter que, dans celui de la 2^e ligne, « z_1 suivie de z_2 », l'objectif est de maximiser l'adaptabilité z_2 et les contraintes technologiques sont les 10 équations du modèle décrit en (a), auxquelles s'ajoute une contrainte additionnelle exigeant que les coûts de déplacement soient fixés au minimum de 6 141 dollars :

$$1030\ v_{11} + 1157\ v_{12} + \ldots + \ 1200\ v_{23} + \ldots + 1305\ v_{55} \ = \ 6\ 141.$$

De même, dans le modèle de la 3e ligne, « z_1 suivie de z_2, puis de z_3 », l'objectif est de maximiser le volume des ventes z_3; enfin, les contraintes technologiques, au nombre de 12, sont celles du modèle précédent, auxquelles s'ajoute une équation qui force la fonction-objectif z_2 à prendre la valeur optimale 376 atteinte dans ce modèle :

$$55\ v_{11} + 66\ v_{12} + \ldots + \ 67\ v_{23} + \ldots + 80\ v_{55} \ = \ 376.$$

Ordre	**Affectations**					**Valeurs des z_h**		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	z_1	z_2	z_3
z_1	1	3	2	5	4	**6141**	–	–
z_1 suivie de z_2	2	3	1	4	5	6141	**376**	–
z_1 suivie de z_2, puis de z_3	2	3	1	4	5	6141	376	**41 500**
z_2	3	2	4	5	1	–	**416**	–
z_2 suivie de z_3	3	2	1	4	5	–	416	**36 800**
z_2 suivie de z_3, puis de z_1	3	2	1	4	5	**6452**	416	36 800
z_3	4	3	1	2	5	–	–	**44 200**
z_3 suivie de z_2	4	3	2	1	5	–	**354**	44 200
z_3 suivie de z_2, puis de z_1	4	3	2	1	5	**7039**	354	44 200

Les 3e, 6e et 9e lignes de ce tableau décrivent des optimums de Pareto.

(e) Le tableau suivant résume les valeurs des trois fonctions-objectifs pour les solutions trouvées en (a), (b) et (c).

Solution optimale	z_1	z_2	z_3
de (a)	**6141**	376	41 500
de (b)	7420	**416**	32 300
de (c)	7458	337	**44 200**

Convenons d'attribuer des poids de 1, –20 et –5 aux trois critères. La fonction-objectif, que l'on cherchera à minimiser, s'écrit alors :

$$\begin{aligned} z \ &= \ 1\ z_1 - 20\ z_2 - 5\ z_3 \\ &= \ -41\ 070\ v_{11} - 32\ 663\ v_{12} - \ldots - \ 44\ 640\ v_{23} - \ldots - 47\ 795\ v_{55}. \end{aligned}$$

Le tableau suivant décrit les affectations d'une solution optimale. Si on implante cette solution, les coûts de déplacement s'élèveront à 7 039 dollars, la somme z_2 des cotes d'adaptabilité sera égale à 354 et le volume estimé des ventes atteindra 44 200 $, soit le maximum possible.

Candidat	1	2	3	4	5
Succursale	4	3	2	1	5

Noter que cette solution coïncide avec celle obtenue de la méthode hiérarchique dans le cas de l'ordre « z_3 suivie de z_2, puis de z_1 ».

(f) Nous ajoutons aux modèles considérés précédemment des variables de déviation d_h^+ et d_h^- (où $h = 1, 2, 3$), ainsi qu'une variable $D_{\max}$ qui représentera la valeur maximale des 6 variables de déviation.

L'objectif vise essentiellement à minimiser la valeur de $D_{\max}$. Mais, comme on cherche à éviter que les deux variables de déviation d_h^+ et d_h^- associées à un même critère soient non nulles en même temps, on pénalisera – faiblement – les variables de déviation. Plus précisément, l'objectif consistera à minimiser z, où

$$z = d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_2^+ + d_3^- + d_3^+ + 1000\, D_{\max}.$$

Les contraintes technologiques du modèle forment trois groupes.

- Il faut d'abord reprendre les 10 équations du modèle d'affectation de la question (a) :

$$v_{i1} + v_{i2} + v_{i3} + v_{i4} + v_{i5} = 1 \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$v_{1j} + v_{2j} + v_{3j} + v_{4j} + v_{5j} = 1 \qquad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

- Il faut ensuite définir les variables de déviation :

$$1030\, v_{11} + 1157\, v_{12} + \ldots + 1200\, v_{23} + \ldots + 1305\, v_{55} + d_1^- - d_1^+ = 6800$$

$$55\, v_{11} + 66\, v_{12} + \ldots + 67\, v_{23} + \ldots + 80\, v_{55} + d_2^- - d_2^+ = 350$$

$$8200\, v_{11} + 6500\, v_{12} + \ldots + 8900\, v_{23} + \ldots + 9500\, v_{55} + d_3^- - d_3^+ = 40\,000.$$

- Il faut enfin s'assurer que $D_{\max}$ est supérieure à toutes les variables de déviation :

$$D_{\max} \geq d_h^- \qquad h = 1, 2, 3$$

$$D_{\max} \geq d_h^+ \qquad h = 1, 2, 3.$$

Le tableau suivant décrit les affectations d'une solution optimale de ce modèle. Si cette solution est implantée, il en coûtera 6 895 \$ en frais de déplacement ($d_1^- = 0$ et $d_1^+ = 95$), la somme des cotes d'adaptabilité sera de 294 points ($d_2^- = 56$ et $d_2^+ = 0$), les ventes estimées s'élèveront à 40 100 \$ ($d_3^- = 0$ et $d_3^+ = 100$). La déviation maximale est d_3^+.

Candidat	1	2	3	4	5
Succursale	5	4	2	1	3

(g) Nous reprenons les variables du modèle précédent (sauf $D_{\max}$). Les contraintes technologiques sont celles des deux premiers groupes du modèle précédent. Les pénalités de déviation positives des critères z_2 et z_3 que l'on cherche à maximiser, de même que la pénalité de déviation négative du critère z_1 que l'on cherche à minimiser, sont *a priori* posées égales à 0; enfin, on attribue des pénalités de 1, 20 et 5 respectivement aux variables d_1^+, d_2^- et d_3^-. En résumé, l'objectif s'écrit de la façon suivante :

$$\text{Min } z = d_1^+ + 20\, d_2^- + 5\, d_3^-.$$

Le tableau suivant décrit les affectations d'une solution optimale de ce modèle, pour laquelle la fonction-objectif z prend la valeur 0. Si cette solution est implantée, il en coûtera 6 141 $ en frais de déplacement ($d_1^- = 659$ et $d_1^+ = 0$), la somme des cotes d'adaptabilité sera de 375 points ($d_2^- = 0$ et $d_2^+ = 25$), les ventes estimées s'élèveront à 41 500 $ ($d_3^- = 0$ et $d_3^+ = 1500$).

Candidat	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Succursale	2	3	1	4	5

10. Pollution.

(a) Nous décrivons d'abord le modèle linéaire utilisé. Il comporte neuf variables de décision. Les trois premières résument le plan de production de l'entreprise et sont définies de la façon suivante :

x_j = nombre d'unités de Pj produites heddomadairement.

Les six autres sont des variables de déviation et seront définies comme d'habitude dans des équations qui relient les cibles d'André aux variables x_j.

Les contraintes technologiques se regroupent en trois catégories. Il faut d'abord que, dans chaque atelier, le temps utilisé n'excède pas le temps disponible.

Atelier A $\quad 0{,}20\, x_1 + 0{,}2\, x_2 + 0{,}4\, x_3 \leq 1\,500$

Atelier B $\quad 0{,}25\, x_1 + 0{,}4\, x_2 + 0{,}5\, x_3 \leq 1\,500$

Atelier C $\quad 2\, x_1 + 4\, x_2 + 1\, x_3 \leq 5\,000.$

Le plan de production doit respecter l'exigence du banquier et doit comporter au moins 1 500 unités de P1.

Banquier $\quad x_1 \geq 1\,500$

Min P1 $\quad 1\, x_1 + 3\, x_2 + 2\, x_3 \geq 5\,000.$

Enfin, il faut inclure trois équations qui définissent les variables de déviation.

Cible de pollution $\quad 2\, x_1 + 1\, x_2 + 2\, x_3 + d_1^- - d_1^+ = 6\,000$

Cible de P2 $\quad x_2 + d_2^- - d_2^+ = 200$

Cible de P3 $x_3 + d_3^- - d_3^+ = 2\,000.$

L'objectif de notre modèle consiste à minimiser la somme pondérée des déviations. Nous posons : $w_1^- = 0$, car André ne voudra sûrement pas pénaliser un plan de production qui pollue peu. De même, les clients privilégiés mentionnés dans l'énoncé ne s'offusqueraient sans doute pas que les quantités produites dépassent les minimums requis; nous accordons donc un poids nul à tout excédent aux cibles des objectifs 2 et 3. Les poids des trois autres variables de déviation proviennent de l'énoncé. En résumé :

$$\text{Min } z = d_1^+ + 3\,d_2^- + 2\,d_3^-.$$

Le tableau suivant décrit une solution optimale (z_h désigne la valeur de l'objectif numéro h : par exemple, $z_1 = 2\,x_1 + 1\,x_2 + 2\,x_3$).

h	x_h	z_h	d_h^-	d_h^+
1	1500	6300	0	300
2	100	100	100	0
3	1600	1600	400	0

(b) On reprend le modèle de la question (a), mais l'objectif s'écrit cette fois :

$$\text{Min } z = 10\,d_1^+ + 2\,d_2^- + 1\,d_3^-.$$

La solution optimale est la même.

Note. La solution optimale est peu sensible au poids de d_1^+. En effet, posons: $z' = w\,d_1^+ + 2\,d_2^- + 1\,d_3^-$. La solution optimale de la fonction z' coïncide avec celle donnée en (a) quand $w \geq w_c$, où $w_c = 2/7 = 0{,}2857$. On obtient un autre optimum pour z' (voir tableau ci-dessous) quand $0 \leq w \leq w_c$. …

h	x_h	z_h	d_h^-	d_h^+
1	1500	7000	0	1000
2	0	0	200	0
3	2000	2000	0	0

11. Surplus actuariel.

(ab) Pour alléger, les variables x_1 et x_2 représenteront les montants (en M$) attribués aux deux propositions. Voici la traduction en langage mathématique des cinq contraintes que l'analyste doit prendre en considération :

C1. $x_1 + x_2 \leq 8$

C2. $x_1 \leq 0{,}50 \times 8 = 4$

C3. $x_2 \leq 0{,}75 \times 8 = 6$

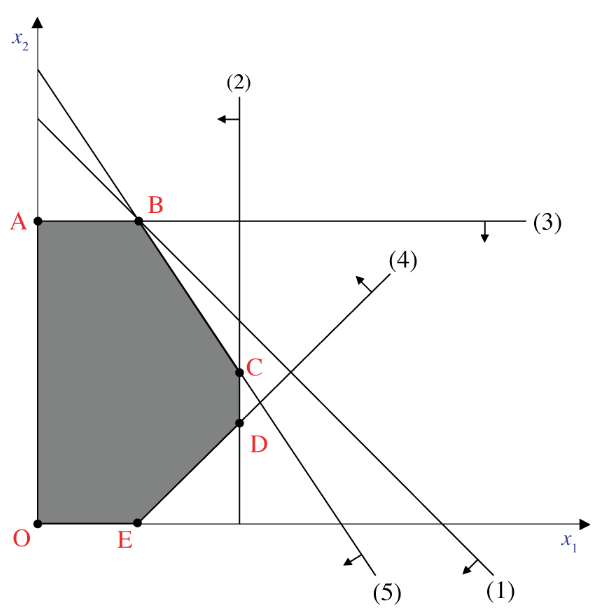
C4. $x_1 - x_2 \leq 2$

C5. $x_1 + ⅔\, x_2 \leq 1{,}20 \times 5 = 6.$

Afin d'éviter les fractions et les problèmes d'arrondis, nous récrivons la dernière contrainte sous la forme suivante :

C5'. $3\, x_1 + 2\, x_2 \leq 18.$

La région admissible du modèle continu C1 à C5 est le polygone OABCDE représenté dans la figure suivante. Les coordonnées des points extrêmes de ce polygone sont données à la droite de la figure.



O = (0 ; 0)

A = (0 ; 6)

B = (2 ; 6)

C = (4 ; 3)

D = (4 ; 2)

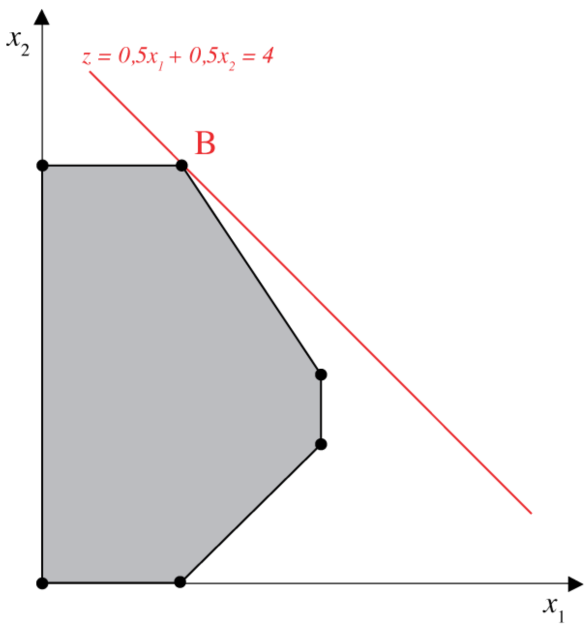
E = (2 ; 0)

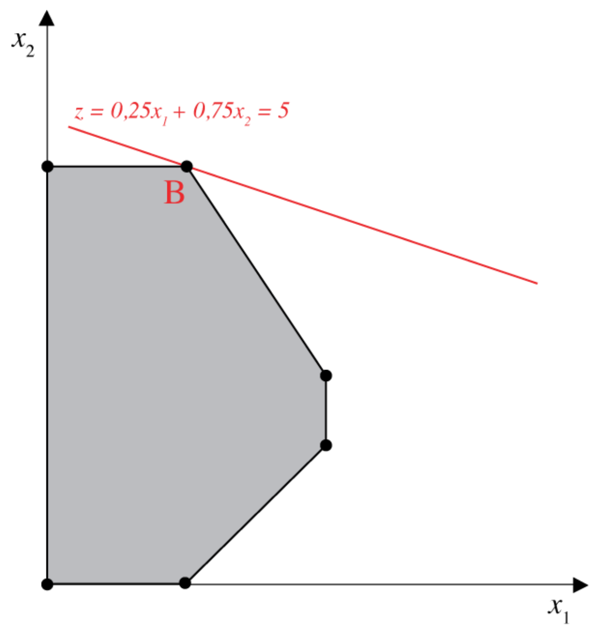
(c) En présence de l'hypothèse que les poids sont non négatifs et que leur somme est égale à 1, la condition « $p_1 \leq p_2$ » de l'énoncé équivaut à exiger que $0 \leq p_1 \leq ½$.

Pour alléger, convenons de noter p le poids attribué au premier objectif. La fonction-objectif pondérée se récrit :

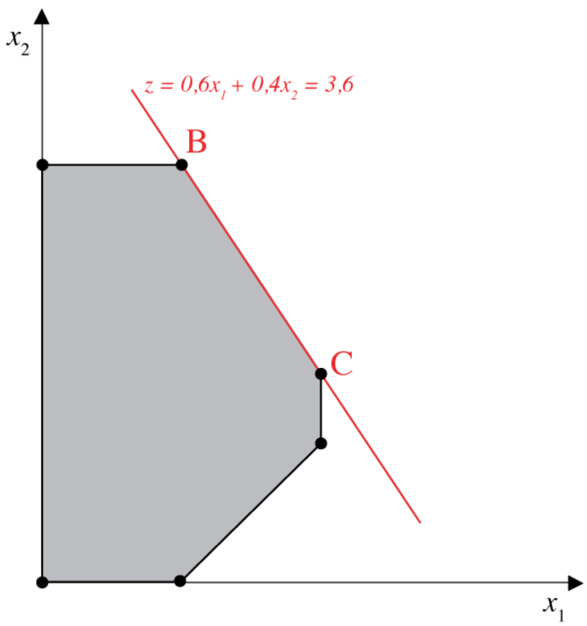
$$z = p\,x_1 + (1-p)\,x_2\,, \qquad \text{où } 0 \le p \le ½.$$

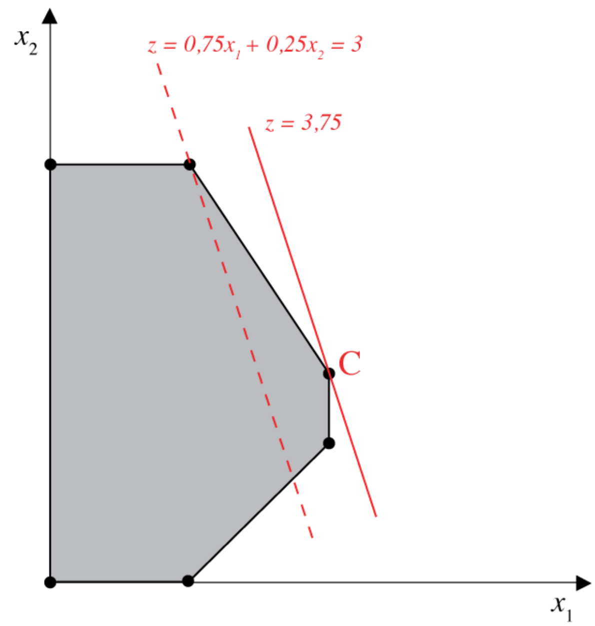
Le graphique de gauche ci-dessous illustre le cas limite p = 0,5. On constate que B est l'unique optimum. Le graphique de droite, lui, correspond au cas où p = 0,25 et, encore une fois, B est l'unique optimum. De façon générale, lorsque p diminue, les droites de niveaux de la fonction-objectif pondérée z s'approche de l'horizontale et z atteint sa valeur maximale en B. À la limite lorsque p = 0 – mais alors on est dans un contexte unicritère car la fonction-objectif pondérée z coïncide avec z_2 dans ce cas extrême –, tous les points du segment [A; B] optimisent la fonction-objectif $z = z_2$.





(d) Comme le montre le graphique de gauche ci-dessous, les droites de niveaux de z sont parallèles à la droite associée à la contrainte C1 lorsque p = 0,6. Et, alors, tous les points du segment [B; C] optimisent la fonction-objectif z. Le cas où p = 0,75 est représenté dans le graphique de droite : la pente des droites de niveaux est plus forte que celle de la droite associée à la contrainte C1 et le sommet C devient l'unique optimum. Cette conclusion persiste tant et aussi longtemps que p <1. À la limite, quand p = 1 – mais alors on est dans un contexte unicritère car la fonction-objectif pondérée z coïncide avec z_1 dans ce cas extrême –, tous les points du segment [C; D] optimisent la fonction-objectif $z = z_1$.





(e) Le tableau ci-dessous indique les solutions qui optimisent la fonction-objectif pondérée z selon la valeur du poids p_1 attribué au 1er objectif. On retrouve essentiellement les mêmes résultats qu'aux deux questions précédentes : ainsi, les seules solutions de compromis sont les points du segment [B; C], qui sont les optimums de Pareto de ce modèle. Lorsque le poids p_1 est inférieur à 0,60, la «meilleure» solution consiste à consacrer 2 M$ à la proposition 1, et 6 M$ à la proposition 2. Dans le cas où p_1 est supérieur à 0,60, il serait préférable d'investir seulement 4 M$ dans la proposition 1, et 3 M$ dans la proposition 2; une portion du surplus actuariel resterait inutilisé. Enfin, à la valeur limite p_1 = 0,6, les différents points du segment [B; C] sont jugés également attrayants.

p_1	z_O	z_A	z_B	z_C	z_D	z_E	z*	Optimums
0,00	0	**6,00**	**6,00**	3,00	2,00	0,00	6,00	[A; B]
0,10	0	5,40	**5,60**	3,10	2,20	0,20	5,60	B
0,20	0	4,80	**5,20**	3,20	2,40	0,40	5,20	B
0,30	0	4,20	**4,80**	3,30	2,60	0,60	4,80	B
0,40	0	3,60	**4,40**	3,40	2,80	0,80	4,40	B
0,50	0	3,00	**4,00**	3,50	3,00	1,00	4,00	B
0,60	0	2,40	**3,60**	**3,60**	3,20	1,20	**3,60**	**[B; C]**
0,70	0	1,80	3,20	**3,70**	3,40	1,40	3,70	C
0,80	0	1,20	2,80	**3,80**	3,60	1,60	3,80	C
0,90	0	0,60	2,40	**3,90**	3,80	1,80	3,90	C
1,00	0	0,00	2,00	**4,00**	**4,00**	2,00	4,00	[C; D]

(f) Voici un modèle pertinent pour analyser la situation.

$$\text{Min } z = 5\, d_1^+ + 3\, d_1^- + 3\, d_2^+ + 5\, d_2^-$$

sous les contraintes :

contraintes C1 à C5

$$x_1 + d_1^- - d_1^+ = 4{,}5$$

$$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 3{,}5$$

$$x_1,\ x_2,\ d_1^-,\ d_1^+,\ d_2^-,\ d_2^+ \geq 0.$$

Une solution optimale donne :

$$x_1 = 3{,}667 \quad \text{et} \quad x_2 = 3{,}5 \quad \text{et} \quad d_1^- = 0{,}833 \quad \text{et} \quad z = 2{,}5.$$

Si cette solution est implantée, seulement 7 166 667 $ des 8 M$ en surplus seront investis dans les deux propositions.

12. Forage de puits artésiens.

(a) À la base, il s'agit d'un problème d'affectation : l'attaché doit attribuer le forage d'un et d'un seul village à chacune des entreprises. Les variables utilisées seront donc des variables binaires v_{Ij} définies ainsi :

$$v_{Ij} = 1 \quad \text{si l'entreprise } I \text{ se voit attribuer le forage du village V}j.$$

Les contraintes technologiques forment deux groupes.

Entreprise I $\quad v_{I1} + v_{I2} + v_{I3} + v_{I4} + v_{I5} + v_{I6} + v_{I7} + v_{I8} = 1 \quad$ I = A, B, C, D, E, F, G, H

Village j $\quad v_{Aj} + v_{Bj} + v_{Cj} + v_{Dj} + v_{Ej} + v_{Fj} + v_{Gj} + v_{Hj} = 1 \quad$ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Les objectifs considérés par l'attaché s'écrivent :

$$\text{Min } z_S = 121\, v_{11} + 118\, v_{12} + 127\, v_{13} + \ldots + 135\, v_{18} + 130\, v_{21} + \ldots + 132\, v_{88}$$

$$\text{Max } z_R = 25\, v_{11} + 28\, v_{12} + 27\, v_{13} + \ldots + 23\, v_{18} + 25\, v_{21} + \ldots + 24\, v_{88}$$

$$\text{Max } z_C = 69\, v_{11} + 72\, v_{12} + 63\, v_{13} + \ldots + 55\, v_{18} + 60\, v_{21} + \ldots + 58\, v_{88}.$$

Le tableau suivant décrit des solutions optimales obtenues en optimisant chacun de ces objectifs séparément.

ObjectIf	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	z_S	z_R	z_C
Min z_S	F	G	D	B	H	A	C	E	**987**	214	526
Max z_R	H	D	G	E	F	A	C	B	1018	**227**	446
Max z_C	F	G	D	E	B	A	C	H	992	212	**541**

(b) Le premier modèle coïncide avec le modèle associé à l'objectif de minimiser z_S dans la question précédente. On obtient évidemment la solution optimale décrite dans la 1re ligne du tableau ci-dessus. Quant au 2e modèle, il est obtenu du 1er en prenant z_R comme objectif et en ajoutant la contrainte suivante, qui exige que le montant total des soumissions soit égal à 987 milliers de dollars :

$$121\, v_{11} + 118\, v_{12} + 127\, v_{13} + \ldots + 135\, v_{18} + 130\, v_{21} + \ldots + 132\, v_{88} \;=\; 987.$$

Enfin, le 3e modèle est obtenu du second en prenant z_C comme objectif et en ajoutant la contrainte suivante, qui exige que les retombées locales s'élèvent à 227 milliers de dollars :

$$25\, v_{11} + 28\, v_{12} + 27\, v_{13} + \ldots + 23\, v_{18} + 25\, v_{21} + \ldots + 24\, v_{88} \;=\; 227.$$

Le tableau ci-dessous décrit les solutions optimales calculées par Excel.

Modèle	ObjectIf	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	z_S	z_R	z_C
1	Min z_S	F	G	D	B	H	A	C	E	**987**	214	526
2	Max z_R	F	D	G	H	E	A	C	B	987	**227**	472
3	Max z_C	F	D	G	H	B	A	C	E	987	227	**481**

(c) Il s'agit de reprendre l'approche de la solution à la question précédente, avec quelques adaptations. Le tableau ci-dessous décrit les solutions optimales calculées par Excel. On notera que les solutions des 2e et 3e modèles coïncident.

Modèle	ObjectIf	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	z_S	z_R	z_C
1	Max z_C	F	G	D	E	B	A	C	H	992	212	**541**
2	Max z_R	F	G	D	E	B	A	C	H	992	**212**	541
3	Min z_S	F	G	D	E	B	A	C	H	**992**	212	541

(d) Il faut introduire des variables de déviation définies par les équations suivantes :

$$121\, v_{11} + 118\, v_{12} + 127\, v_{13} + \ldots + 135\, v_{18} + 130\, v_{21} + \ldots + 132\, v_{88} + d_S^- - d_S^+ \;=\; 1000$$

$$25\, v_{11} + 28\, v_{12} + 27\, v_{13} + \ldots + 23\, v_{18} + 25\, v_{21} + \ldots + 24\, v_{88} + d_R^- - d_R^+ \;=\; 222$$

$$69\, v_{11} + 72\, v_{12} + 63\, v_{13} + \ldots + 55\, v_{18} + 60\, v_{21} + \ldots + 58\, v_{88} + d_C^- - d_C^+ \;=500.$$

Selon l'énoncé, l'attaché retient les pénalités de déviation suivantes :

$$w_S^- = w_R^+ = w_C^+ = 0 \quad \text{et} \quad w_S^+ = 1 \quad \text{et} \quad w_R^- = 5 \quad \text{et} \quad w_C^- = 2{,}5.$$

L'objectif s'écrit donc ainsi :

$$\text{Min} \;\; z = d_S^+ + 5\, d_R^- + 2{,}5\, d_C^-.$$

Le tableau ci-dessous décrit la solution optimale calculée par Excel.

V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	z_S	z_R	z_C
F	A	G	H	B	E	C	D	994	221	502