Chapitre 5 – Solutions des problèmes

1. L'importation de voitures de luxe.

La figure de la page suivante illustre un réseau associé à ce problème. Les éléments de ce modèle graphique sont décrits ci-dessous.

- ***Flot :*** Les voitures qui seront transportées entre les différents lieux mentionnés dans l'énoncé constituent clairement le flot qui circulera dans le réseau.

- ***Arcs virtuels émetteurs :*** Les voitures qui seront acheminées aux concessionnaires entreront dans le pays par les ports A et B, ou bien font partie des stocks des entrepôts E_1 et E_2. Des arcs émetteurs sont donc associés aux ports et à ces deux entrepôts; leurs sommets terminaux sont dénotés P_A , P_B , E_1 et E_2 dans la figure. Les bornes inférieures sur les arcs $\bullet \rightarrow E_1$ et $\bullet \rightarrow E_2$ sont nulles, car on se limite ici à «minimiser les coûts relatifs à l'acheminement des voitures entre les ports et les concessionnaires».

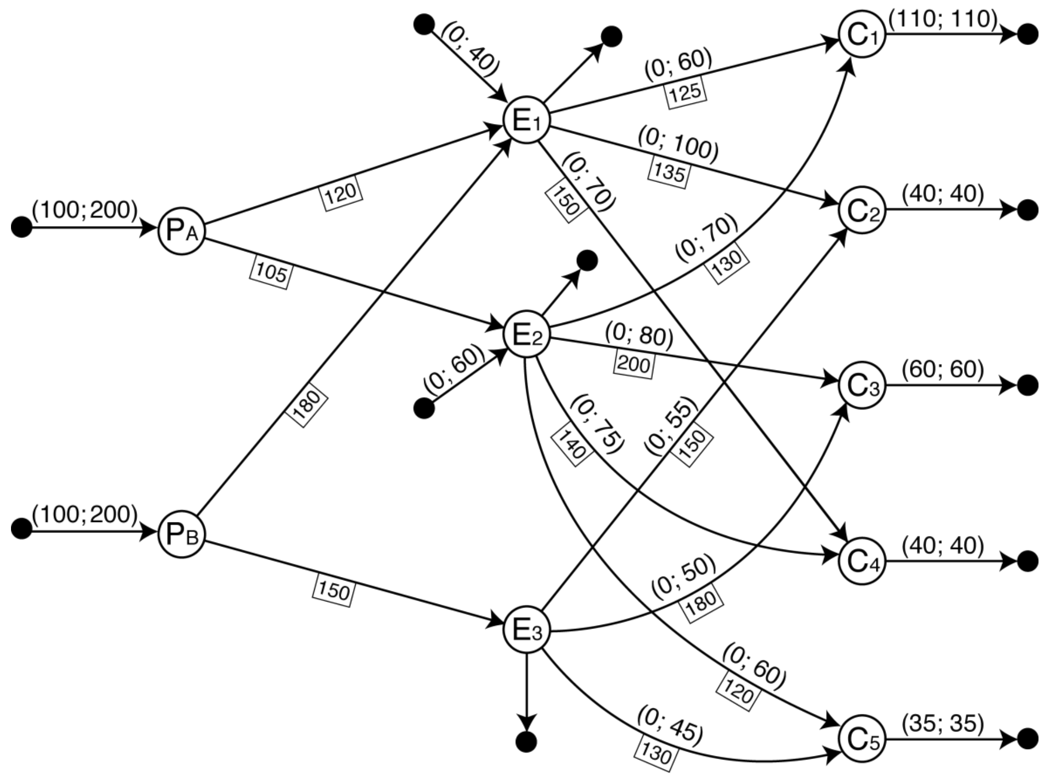
- ***Arcs virtuels récepteurs :*** Les concessionnaires constituent les destinations finales des voitures. On insère donc dans le réseau cinq sommets dénotés C_1 , C_2 , ..., C_5 qui leur correspondent, ainsi que des arcs virtuels récepteurs de la forme $C_h \rightarrow\bullet$. De plus, l'entrepôt E_h (où h = 1, 2, 3) peut conserver des voitures à la fin du mois, et on lui associe un arc virtuel récepteur de la forme $E_h \rightarrow\bullet$.

- ***Arcs non virtuels :*** La présence ou l'absence d'un arc entre deux sommets se déduit des deux tableaux de coûts de transport fournis dans l'énoncé.

Une solution optimale, dont le coût total de transport s'élève à 66 400 \$, consiste à

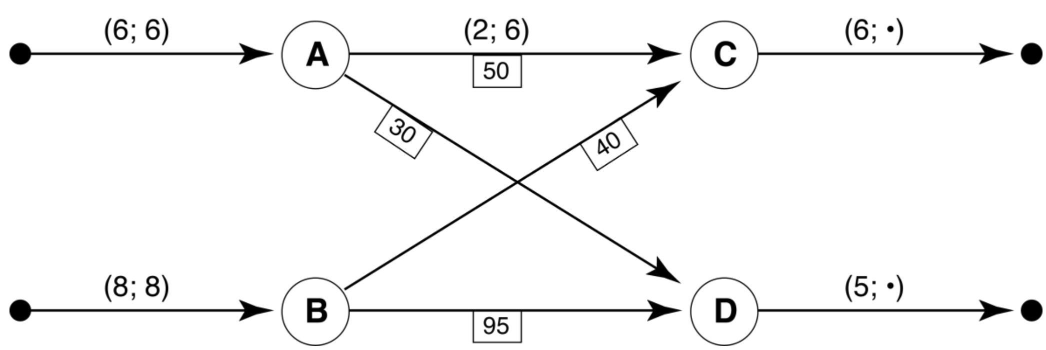
- faire entrer 100 véhicules dans le port P_A , dont 5 seront expédiés à l'entrepôt E_1 et 95 à l'entrepôt E_2 ;
- faire entrer 100 véhicules dans le port P_B , qui seront tous expédiés à l'entrepôt E_3 ;
- livrer les 45 véhicules disponibles en E_1 : 40 iront chez le concessionnaire C_1, les 5 autres chez le concessionnaire C_2;
- livrer les 155 véhicules disponibles en E_2 : 70, 10, 40 et 35 voitures seront envoyées aux concessionnaires C_1 , C_3 , C_4 et C_5 respectivement;
- livrer 85 des 100 véhicules disponibles en E_3 : on enverra 35 voitures au concessionnaire C_2 et 50 voitures à C_3 ; les 15 autres voitures seront conservées en E_3 ;
- satisfaire à la demande des 5 concessionnaires.

MOG 5-01 L'importation de voitures de luxe



2. Sanivac.

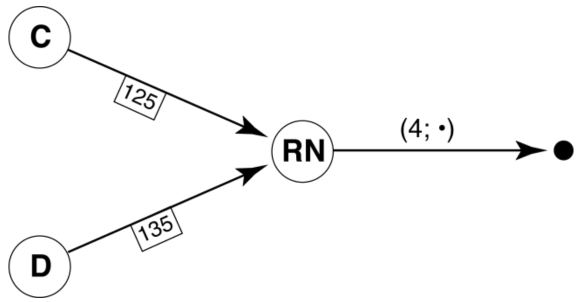
(a) Voici le réseau demandé.



(b) Il suffit d'ajouter des arcs virtuels •→C et •→D de bornes (5; 5) et (3; 3) respectivement.

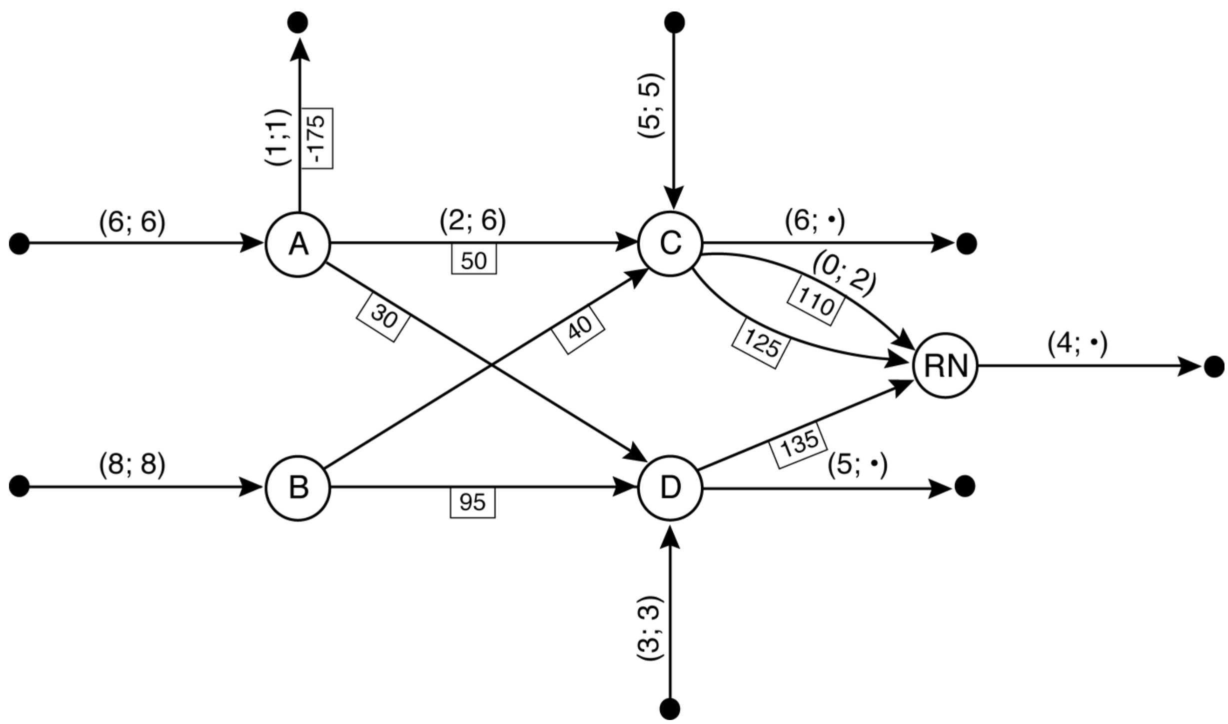
(c) Ajouter un arc virtuel A→• sur lequel sont reportés des bornes (1; 1) et un coût négatif −175 représentant la somme versée à Sanivac par le transporteur.

(d) Ajouter le sous-réseau ci-dessous. (Les arcs virtuels •→C, C→•, •→D et D→• restent inchangés.)



(e) Remplacer l'arc C→RN ajouté à la question précédente par deux arcs C→RN :

- sur le premier sont reportés des bornes (0; 2) et un coût de 110;
- sur le second est reporté un coût de 125.

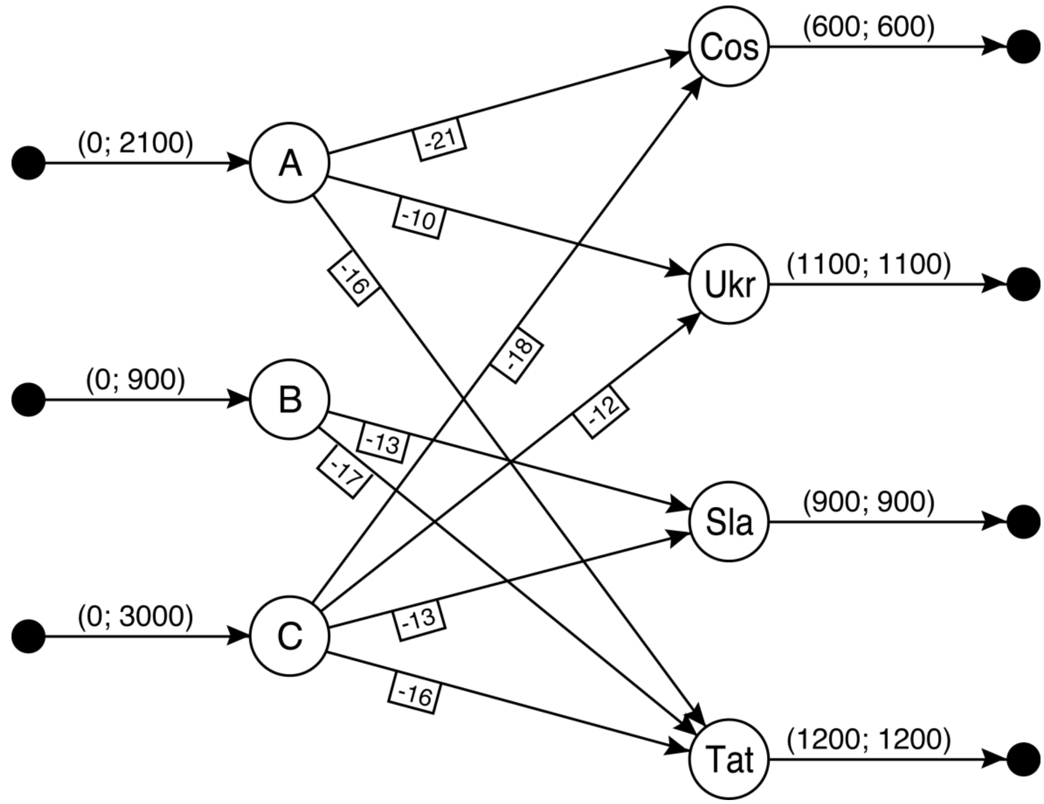


3. La maison Olga.

(a) La figure de la page suivante illustre un réseau associé à ce problème. Les éléments de ce modèle graphique sont :

- ***Flot :*** Le flot qui circulera sur l'arc $I \to J$ est constitué des roubachki du modèle J fabriquées par l'atelier I.
- ***Sommets émetteurs :*** Les ateliers A, B et C sont les sommets émetteurs de ce réseau.

MOG 5-03a La maison Olga



- ***Sommets récepteurs :*** Les modèles de roubachki en sont les sommets récepteurs.
- ***Sommets de transbordement :*** Il n'y a aucun sommet de transbordement dans le réseau.
- ***Arcs du réseau :*** La forme des arcs du modèle découle directement des définitions précédentes. La présence ou l'absence d'un arc entre deux sommets se déduit des définitions précédentes et de l'énoncé. Le coût et les bornes reportés sur un arc se déduisent aisément de l'énoncé.

Une solution optimale, qui assure un profit de 57 600 dollars, consiste à faire fabriquer :

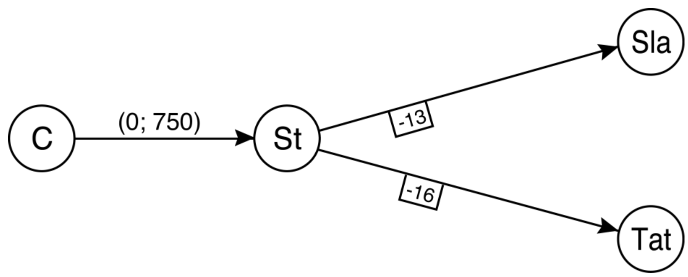
- 600 La Cosaque et 300 La Tatare par l'atelier A;
- 900 La Tatare par l'atelier B;
- 1 100 L'Ukrainienne et 900 La Slavonne par l'atelier C.

(b) Les bornes des arcs virtuels • → A et • → B deviennent (600; 2100) et (300; 900) respectivement.

(c) Des bornes (600; 2100) et (600; 3000) sont reportées sur les arcs A $\to$ Ukr et C $\to$ Ukr respectivement. Les bornes sur l'arc virtuel Ukr $\to$ • doivent alors être modifiées; on peut, par exemple, reporter les bornes (1200; 5100) sur cet arc.

Note. On peut conserver les bornes (0; 2100) sur l'arc virtuel • $\to$ A ou les remplacer par (600; 2100). Une remarque analogue s'applique à l'arc • $\to$ C.

(d) Les arcs C $\to$ Sla et C $\to$ Tat du réseau donné en réponse à la question ***(a)*** sont remplacés par le sous-réseau suivant.



4. Le nettoyage de bureaux.

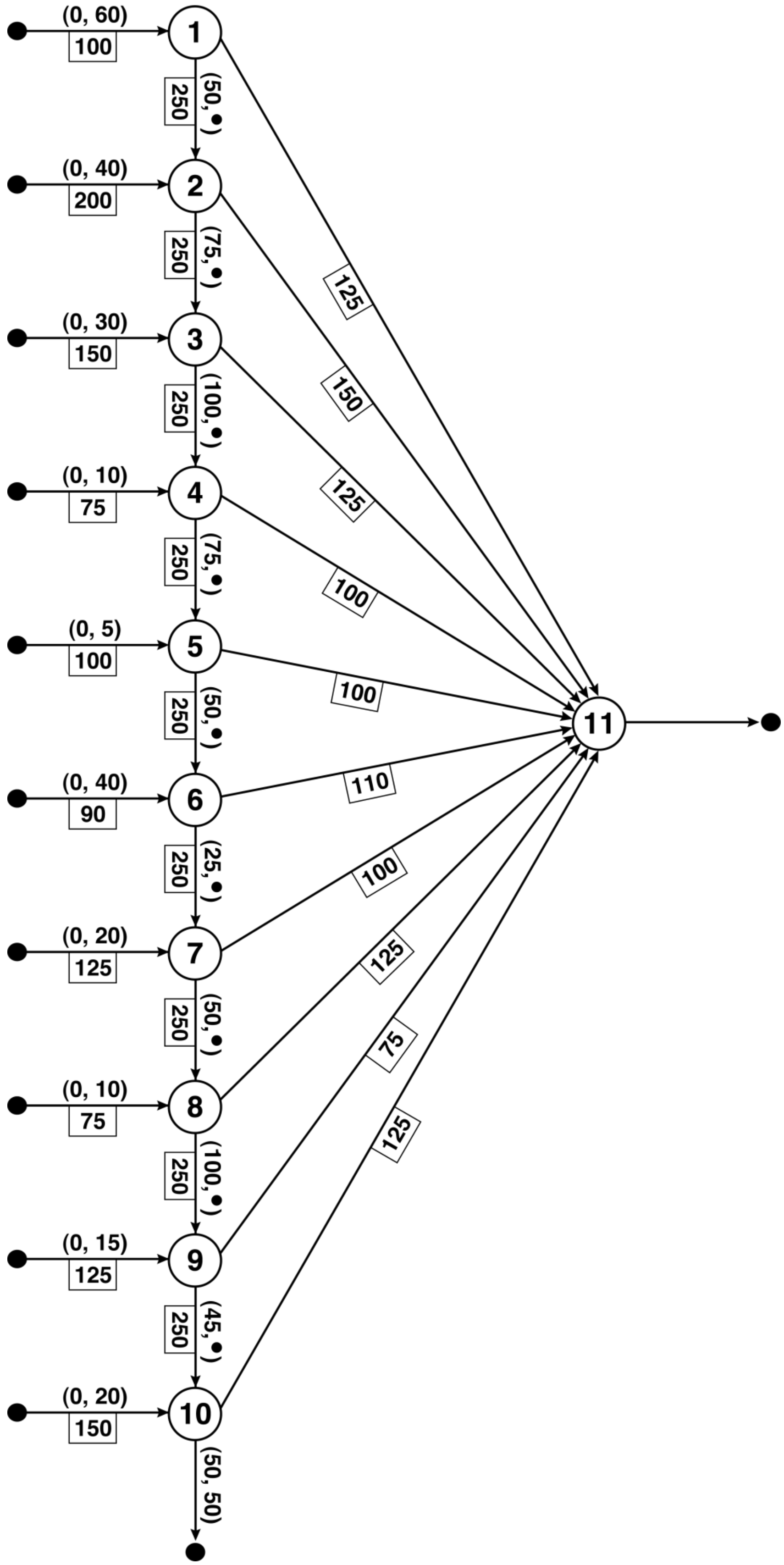
(a) Une unité de flot sur un arc de la forme • $\to$ *i* représente un employé en entraînement qui entrera en fonction au début du mois *i* : on reporte donc sur cet arc le coût de la ligne «R+E» correspondant au mois *i*. De même, le flot sur l'arc $i \to i$+1, où i = 1, ..., 9, indique combien de personnes travailleront pour l'entrepreneur durant le mois *i* : le coût sur un tel arc sera donc 250, tout comme celui sur l'arc 10 $\to$ • d'ailleurs. Enfin, le flot qui transite par un arc de la forme $i \to 11$ représente les employés débauchés à la fin du mois *i*; on reporte sur ces arcs les coûts de débauchage fournis dans l'énoncé. La figure de la page suivante illustre le modèle graphique associé à ce problème.

Note. Le coût sur l'arc 10 $\to$ • pourrait être posé égal à 0, au lieu de 250, valeur choisie dans le réseau : le flot sur cet arc étant fixé à 50 par les bornes, le coût unitaire qu'on lui impute n'a pas d'impact sur la solution optimale obtenue, seule change la valeur minimale de *z*.

(b) Le montant minimal des dépenses que devra engager l'entrepreneur est de 204 925 $. Le tableau suivant décrit un plan optimal : la ligne E indique combien de personnes embaucher chaque mois, la ligne D, combien en débaucher. Noter que, même si les besoins totalisaient 570 mois-personnes, il suffirait d'embaucher 155 employés pour satisfaire à la demande au moindre coût.

Mois	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
E	50	25	25	–	–	20	20	10	–	5
D	–	–	–	25	25	–	–	–	55	–

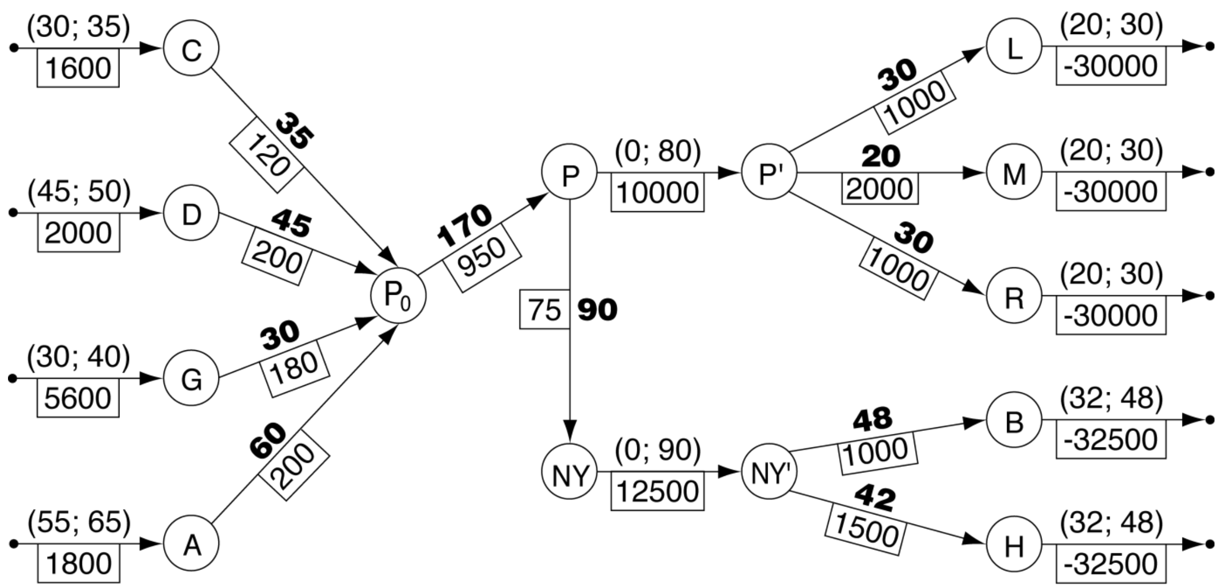
MOG 5-04 Le nettoyage de bureaux



5. Hatitudes, la multinationale du chapeau de feutre de luxe.

L'unité de flot choisie est le quintal (100 kg) de bourre. Comme une cloche pèse 200 g, un quintal de bourre permet de fabriquer 500 cloches, puis 500 chapeaux. Par conséquent, les données qui, dans l'énoncé, sont exprimées en termes de cloches ou de chapeaux doivent être converties avant d'être reportées sur les arcs du réseau : les quantités sont divisées par 500, les coûts sont multipliés par 500.

Un réseau traduisant ce problème est reproduit ci-dessous. Le flot est émis par les ports où Hatitudes achète sa matière première, lesquels ports sont représentés dans le réseau par les sommets C, D, G et A. Les sommets P et NY associés aux usines ont été dédoublés afin de reporter sur les arcs $P \rightarrow P'$ et $NY \rightarrow NY'$ les capacités des usines ainsi que les coûts des dernières opérations qui diffèrent d'une usine à l'autre. Enfin, un sommet additionnel P_0 est placé en amont de P, afin de séparer le mélange produit à Paris en deux parties, l'une expédiée à New York, l'autre traitée sur place à Paris.



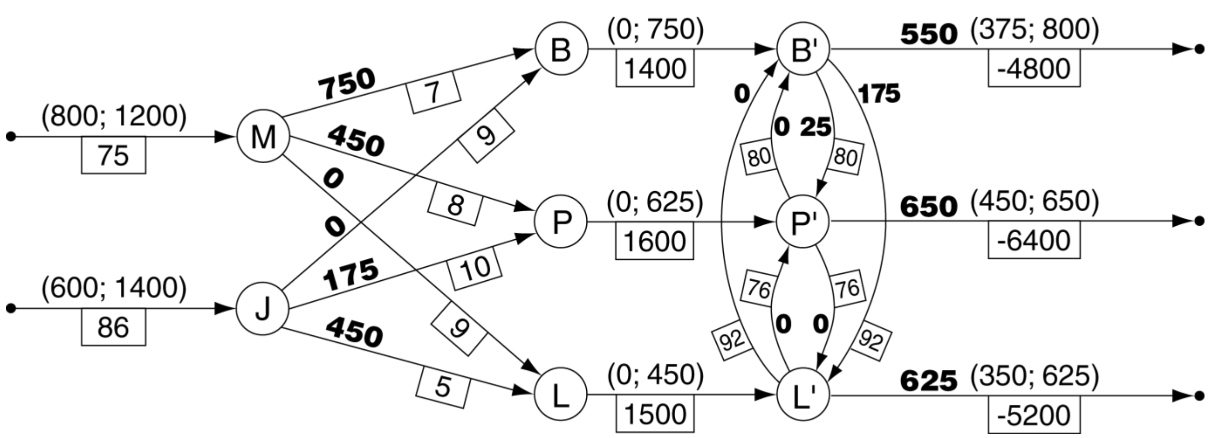
Une solution optimale a été reportée en gras sur la figure ci-dessus : Hatitudes achètera 35 quintaux de bourre à Casablanca, 45 à Dawson, 30 à Guayaquil et 60 à Auckland; elle vendra $30 \times 500 = 15\,000$ chapeaux aux détaillants de Londres, 10 000 chapeaux à ceux de Milan, 15 000 à ceux de Reims, 24 000 à ceux de Boston et enfin 21 000 à ceux de Houston. Hatitudes retirera 2 568 150 euros de ces opérations.

6. Les perruques Sanchez.

L'unité de flot est le kilogramme de cheveux. Comme une perruque exige 0,25 kg de cheveux, les données qui, dans l'énoncé, sont exprimées en termes de perruques doivent être multipliées ou divisées par 4 avant d'être reportées sur les arcs du réseau : les capacités des ateliers, les ventes minimales et maximales sont divisées par 4, les coûts sont multipliés par 4.

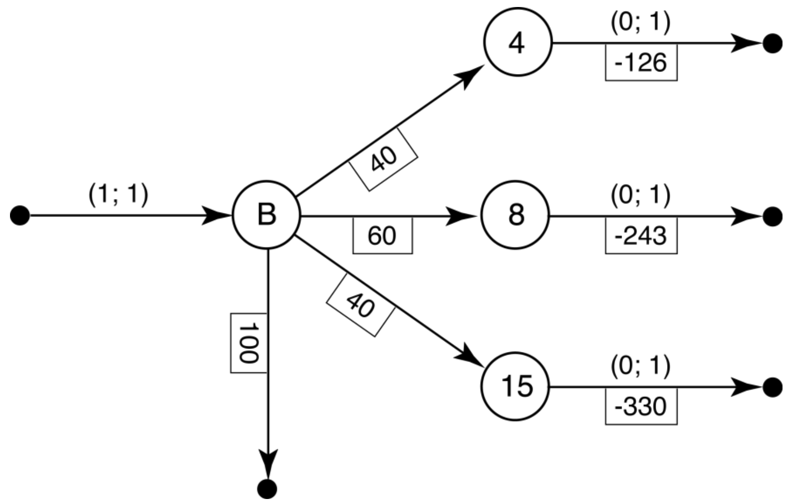
Un réseau pour ce problème est reproduit ci-dessous. Les sommets B, P et L associés aux ateliers ont été dédoublés afin de reporter sur les arcs $B \rightarrow B'$, $P \rightarrow P'$ et $L \rightarrow L'$ les capacités des ateliers ainsi que les coûts de fabrication qui diffèrent d'un atelier à l'autre.

Une solution optimale a été reportée en gras sur la figure; les frères Sanchez retireront 7 150 300 euros l'an prochain de leur commerce s'ils appliquent cette stratégie.



7. Le problème d'affectation des chauffeurs de Trans-Europe.

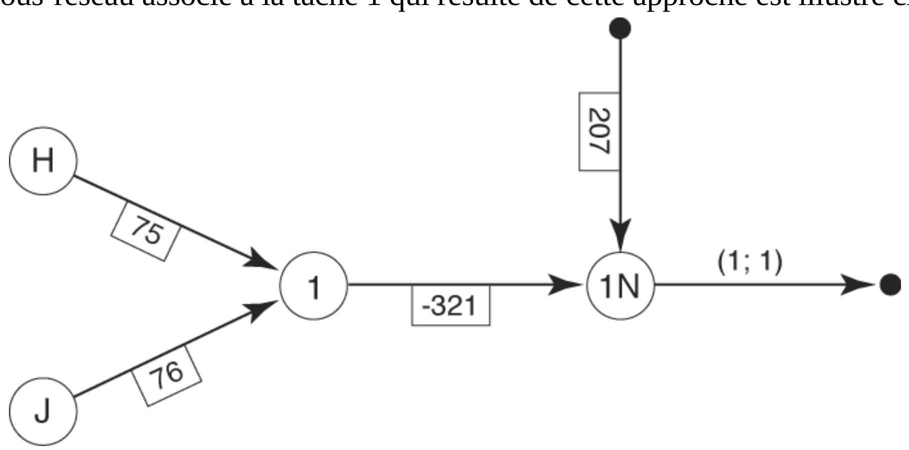
(a) Le réseau contient 29 sommets, un pour chaque chauffeur et un pour chaque tâche. Le sous-réseau associé au chauffeur B prend la forme suivante.



Le tableau ci-dessous décrit une affectation optimale, qui permet à Trans-Europe de réaliser un profit net de 2 468 euros. Si cette solution est implantée, le chauffeur B sera en chômage et les tâches 3 et 10 ne trouveront pas preneur.

Chauffeur	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**
Tâche	–	5	12	11	2	15	1	8	9	14	7	13	6	4

(b) Il existe plusieurs façons de traiter les dédits. L'une d'entre elles consiste à dédoubler les sommets associés aux tâches et à ajouter un arc virtuel sur lequel le dédit est reporté à titre de coût unitaire. Le sous-réseau associé à la tâche 1 qui résulte de cette approche est illustré ci-dessous.



La solution optimale de la question (a) reste optimale en présence des dédits : le chauffeur B sera en chômage et les tâches 3 et 10 ne trouveront pas preneur. Le profit net de Trans-Europe se réduira à 2 140 euros, car l'entreprise de placement devra verser deux dédits :

$$\textit{Profit net} \; = \; 2\,468 - (100 + 150/3) - (100 + 234/3) \; = \; 2\,140.$$

(c) Il suffit d'enlever les arcs virtuels B → •, G → • et L → • du réseau construit à la question (a). Le tableau ci-dessous décrit une affectation optimale dans ce nouveau contexte. Si cette solution est implantée, Trans-Europe réalisera un profit net de 2 128 euros, le chauffeur I sera en chômage et les tâches 3 et 10 ne trouveront pas preneur.

Chauffeur	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Tâche	4	5	12	11	2	15	1	–	9	14	7	13	6	8

(d) Pour forcer l'attribution d'un chauffeur aux tâches du client T1, il suffit d'enlever les arcs $\bullet \rightarrow j$N, où j = 1, 2, 3, 4, 5, traduisant les dédits associés aux tâches 1 à 5 de ce client. Les bornes (1; 1) sur les arcs jN $\rightarrow \bullet$ forcent alors Trans-Europe à attribuer un chauffeur à ces 5 tâches.

Pour traiter le cas du transporteur T2, on ajoute un arc virtuel $\bullet \rightarrow$ T2 sur lequel sont reportées des bornes (0; 1), puis on remplace l'arc $\bullet \rightarrow j$N, où j = 10, 11, 12, 13, 14, par un arc T2 $\rightarrow j$N dont le coût unitaire est le dédit associé à la tâche j qui a été calculé à la question (*b*).

Le tableau ci-dessous décrit une affectation optimale dans ce nouveau contexte. Si cette solution est implantée, Trans-Europe réalisera un profit net de 2 046 euros, le chauffeur I sera en chômage et les tâches 6 et 10 ne trouveront pas preneur.

Chauffeur	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Tâche	4	5	12	11	2	15	1	–	9	3	7	13	14	8

8. La production de turbines.

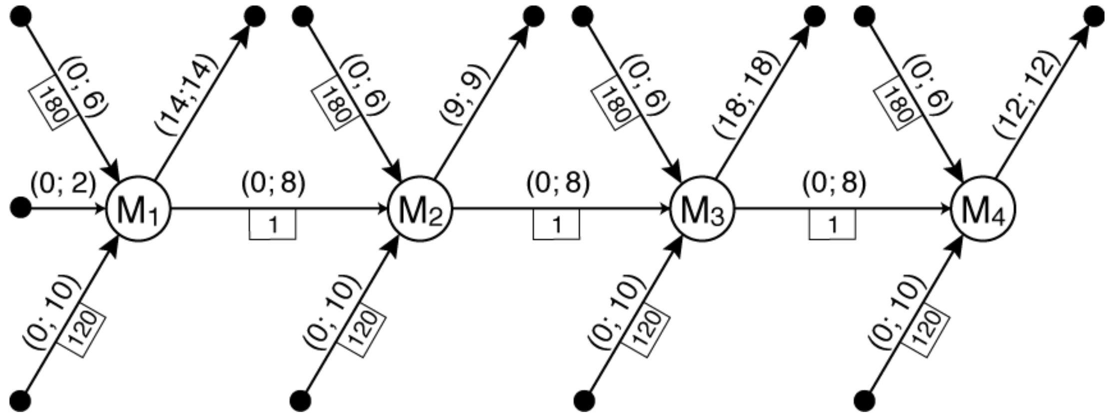
La figure de la page 11 illustre un réseau associé à ce problème. Les éléments de ce modèle sont :

- ***Flot :*** Le flot véhiculé dans le réseau est associé aux turbines qui sont produites, stockées ou livrées pendant un mois donné.
- ***Sommets :*** Le réseau comprend 4 sommets M1, M2, M3 et M4. Chacun servira à la fois de sommet émetteur et de sommet récepteur.
- ***Arcs du réseau :*** À chaque mois Mi sont associés trois arcs virtuels : le premier, qui est de la forme $\bullet \rightarrow$ Mi et sur lequel sont reportés des bornes (0; 10) et un coût de 120 centaines de milliers de dollars, représente la production de turbines pendant les heures régulières du mois i; un 2^{e}, qui est aussi de la forme $\bullet \rightarrow$ Mi et sur lequel sont reportés des bornes (0; 16) et un coût de 180, correspond à la production de turbines pendant les heures supplémentaires du mois i; le 3^{e}, qui est de la forme M$i \rightarrow \bullet$ et sur lequel sont reportés des bornes (d_i; d_i), force la livraison de d_i turbines pendant le mois i. L'arc $\bullet \rightarrow$ M1 traduit la présence de 2 turbines au début du mois 1. Les autres arcs indiquent qu'il est possible de stocker un maximum de 8 turbines, au coût de 1 centaine de milliers de dollars par turbine et par mois.

Le tableau suivant décrit un plan de production optimal, dont le coût total est de 678,2 millions de dollars.

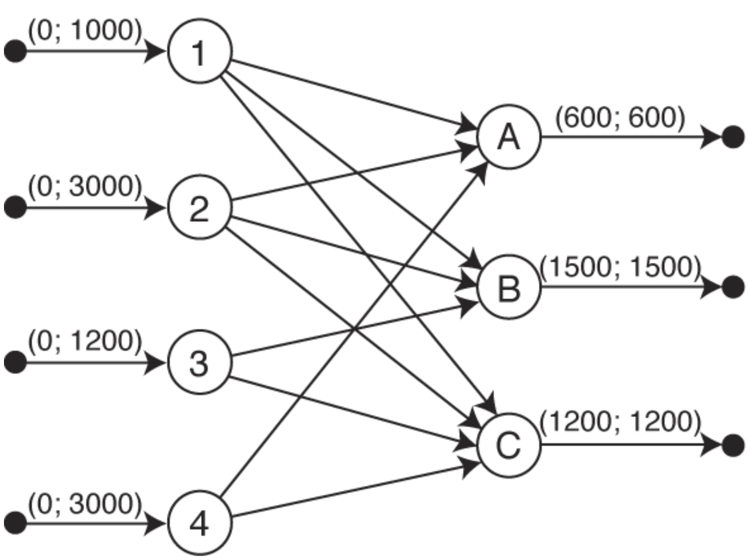
Nombre de turbines	M1	M2	M3	M4
produites en heures régulières	10	10	10	10
produites en heures supplémentaires	2	1	6	2
livrées	14	9	18	12
en stock à la fin du mois	0	2	0	–

MOG 5-08 La production de turbines



9. La Belle au bois dormant.

Il faut décider, pour chaque type d'oreillers, en quelles quantités les acheter chez chaque fabricant. On associe donc sommets émetteurs et sommets récepteurs aux fabricants et aux types d'oreillers, dans cet ordre ou dans l'ordre opposé. La figure suivante illustre un modèle graphique, dans lequel les 4 sommets émetteurs correspondent aux 4 fabricants et les 3 sommets récepteurs, aux 3 types d'oreillers. Les bornes des sommets émetteurs proviennent des nombres totaux d'oreillers proposés par les fabricants; celles des sommets récepteurs assurent que le bon nombre d'oreillers de chaque type sera acheté. Les arcs du réseau de la forme $i \to J$, où i = 1, ..., 4, ont comme bornes (0; •) si J = C, et (200; •) si J = A, B. Les coûts sur ces arcs sont les bénéfices (en dollars par oreiller), affectés d'un signe «moins».



Arc	Coût	Borne inf.
1 ⟶ A	-2,48	200
1 ⟶ B	-1,33	200
1 ⟶ C	-2,01	0
2 ⟶ A	-2,50	200
2 ⟶ B	-1,32	200
2 ⟶ C	-2,00	0
3 ⟶ B	-1,35	200
3 ⟶ C	-2,02	0
4 ⟶ A	-2,49	200
4 ⟶ C	-1,96	0

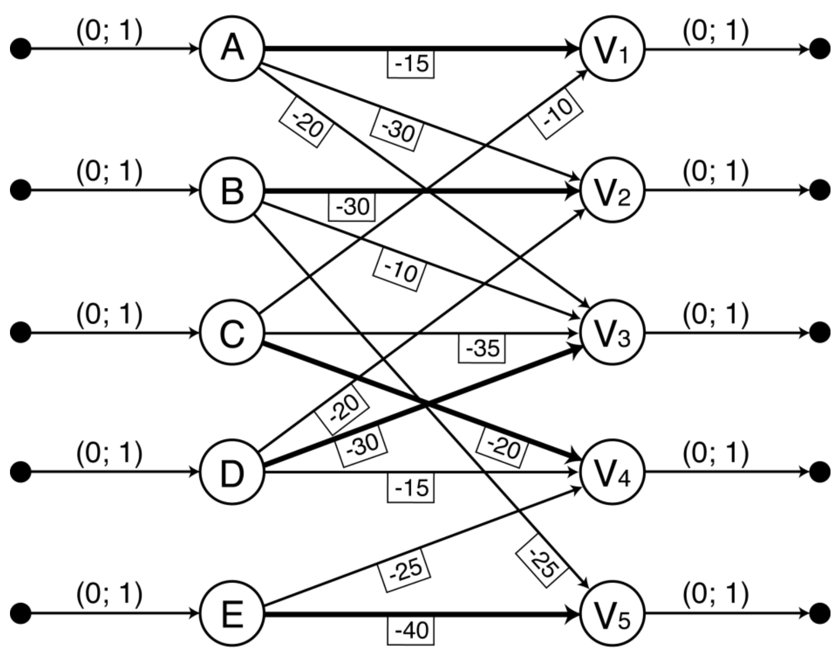
Le profit maximal s'élève à 5 917 \$. Le tableau ci-dessous décrit une solution optimale.

Fabricant	Nombre d'oreillers fournis		
	Type A	Type B	Type C
1	200	200	600
2	200	200	500
3	–	1 100	100
4	200	–	0

10. La répartition de véhicules récréatifs.

(a) On retrouve ici la structure d'un problème d'affectation où il faut affecter des copains à des véhicules. (Noter qu'on pourrait interpréter aussi le problème comme l'affectation de véhicules aux copains.) Convenons donc que les sommets émetteurs sont associés aux copains et les sommets récepteurs, aux véhicules. Les arcs sont de l'une des trois formes suivantes :

- $\bullet \to I$ où I = A, B, C, D, E, pour spécifier que I est un sommet émetteur; puisqu'un copain ne peut être affecté à plus d'un véhicule, sur ces arcs sont reportées les bornes (0; 1) ;
- $V_j \to \bullet$ où j = 1, ..., 5, pour indiquer que V_j est un sommet récepteur; puisqu'on ne peut affecter à un véhicule qu'un seul copain, sur ces arcs sont reportées les bornes (0; 1) ;
- $I \to V_j$ où I et j prennent les valeurs précisées ci-dessus; il s'agit des arcs associés aux décisions importantes (un flot d'une unité sur un tel arc indique que le copain I est affecté au véhicule V_j); afin de maximiser le total des préférences, on reporte sur l'arc $I \to V_j$ un coût $-p$, où p dénote la préférence que I accorde à V_j.



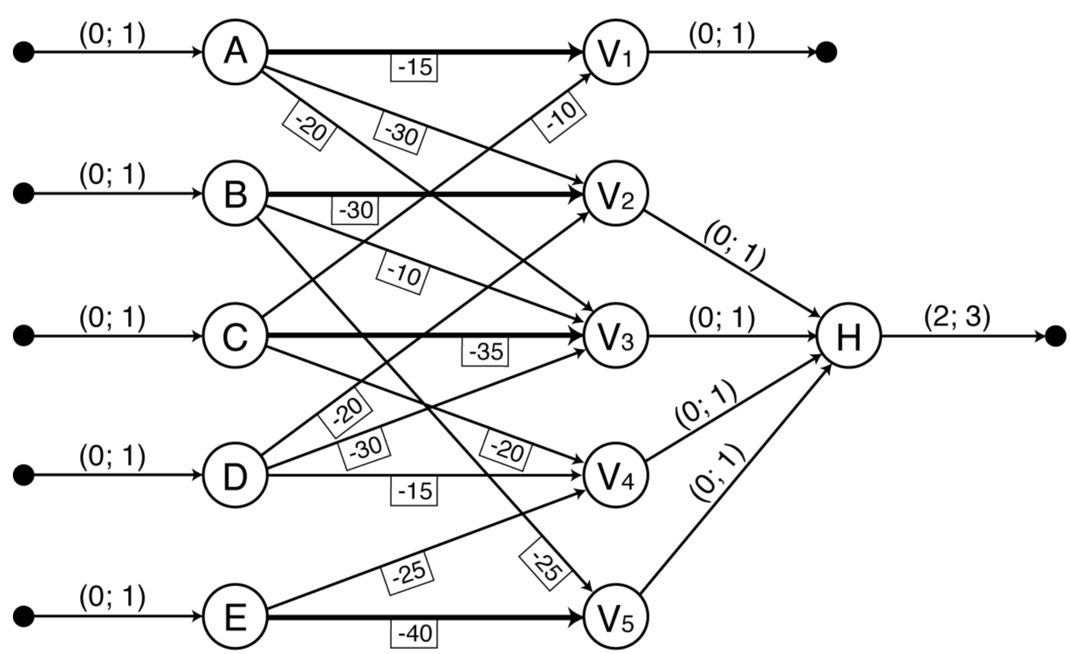
Note. L'unimodularité des modèles de réseau, qui ici garantit l'existence d'une solution optimale entière, assure qu'un véhicule sera accordé en entier à un des copains. Les bornes sur les arcs $I \to V_j$, qui logiquement sont (0; 1), ont été omises, car elles sont redondantes en présence des bornes déjà associées aux arcs $\bullet \to I$. Enfin, puisqu'il y a exactement le même nombre de copains que de véhicules, on obtiendrait un modèle équivalent en posant égales à (1; 1) les bornes des arcs $\bullet \to I$ et $V_j \to \bullet$.

La préférence totale maximale est de 135. La ligne «Solution de (*a*)» du tableau ci-dessous décrit une des solutions optimales. Celle-ci est également dans la figure ci-dessus à l'aide de la convention suivante : un trait plus gras sur un arc $I \to V_j$ signifie que cet arc reçoit un flot de valeur 1 dans la solution optimale, c'est-à-dire que le copain I se voit affecté le véhicule V_j. Cette même convention est utilisée dans les figures des autres questions.

Véhicule	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	Total
Solution de (*a*)	A	B	D	C	E	135
Solution de (*b*)	A	B	C	–	E	120

Pour répondre aux questions (b) à (d), il suffit d'apporter des modifications au réseau de la question (a). Seules ces modifications sont explicitées. Il existe plusieurs façons de procéder; une seule est donnée ici.

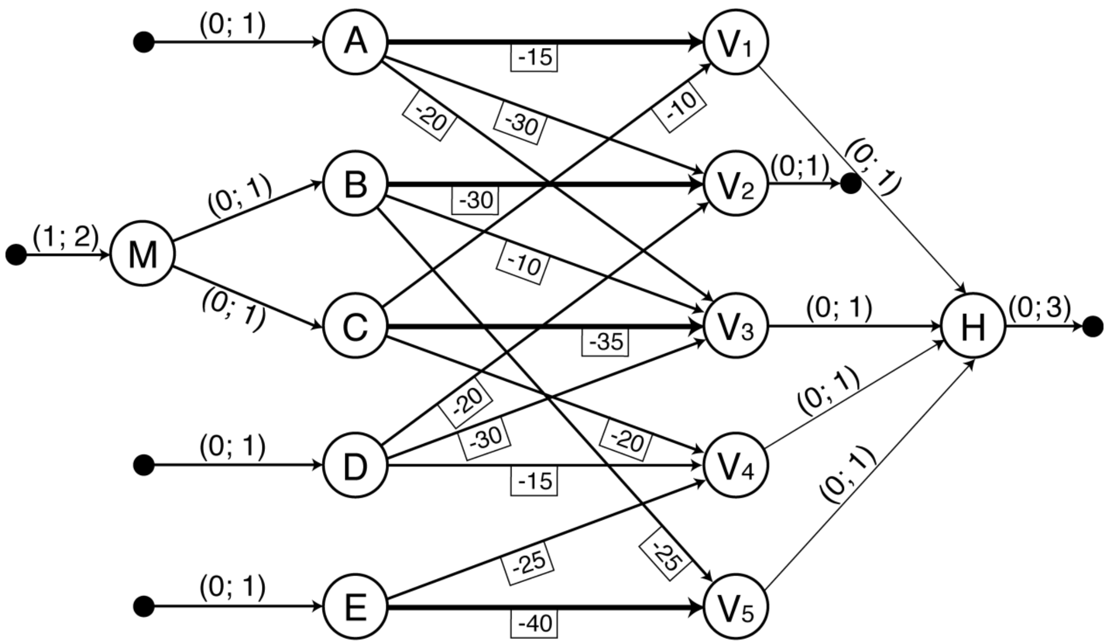
(b) Il faut contrôler le flot *total* qui émane de l'ensemble des sommets correspondant aux véhicules V_2, V_3, V_4 ou V_5. On y arrive d'habitude en agglomérant ce flot sur un arc unique où les bornes appropriées sont reportées. Ici, on ajoute un sommet H et des arcs de la forme $V_j \to H$, où j = 2, 3, 4, 5. Noter que les arcs $V_j \to \bullet$ (j = 2, 3, 4, 5) sont de ce fait éliminés, car les V_j ne sont plus des sommets récepteurs. C'est le sommet H qui remplit ce rôle : on reporte donc des bornes (2; 3) sur l'arc $H \to \bullet$



(c) Le réseau est identique à celui de la question précédente, sauf que des bornes (0; 3) sont reportées sur l'arc H → • : dans toute solution admissible, un au moins des arcs $V_j \to$ H, où j = 2, 3, 4, 5, aura un flot nul et le véhicule V_j correspondant sera attribué au groupe.

Le total maximal des préférences est de 120 et le véhicule V_4 ne doit pas être choisi. Pour le reste, la solution optimale de (*c*) coïncide avec celle de (*b*) décrite dans le tableau ci-dessus

(d) Cette fois encore, il faut contrôler le flot total sur certains ensembles d'arcs. Pour contrôler le flot intrant total aux sommets B et C, on crée un sommet émetteur M avec bornes (1; 2) et des arcs M → B et M → C, tous deux de bornes (0; 1). Et pour contrôler le flot extrant total des sommets V_1 et V_3 à V_5 , on procède de façon similaire à (*b*). Le réseau résultant est illustré à la ci-dessous. Le total maximal des préférences s'élève à 120 et la solution de (*b*) décrite au tableau de la page précédente est l'une des solutions optimales de (*d*).



11. La société Volauvent.

(a) Dans le cas de la société Volauvent, il faut affecter des vols, ou encore des destinations, à des aires d'embarquement aux différentes heures possibles. Il y a 8 paires aire-heure de départ et 6 vols différents. On crée donc, pour équilibrer, 2 vols fictifs. On convient d'associer les lignes de la matrice des coûts aux vols et les colonnes aux paires aire-heure de départ. Les coûts d'affectation sont les profits quotidiens donnés dans l'énoncé du problème, affectés d'un signe moins, sauf pour les vols fictifs dont les coûts d'affectation sont nuls.

Coûts d'affectation

	1-6h	2-6h	1-8h	2-8h	1-10h	2-10h	1-13h	2-13h
R-L	-11	-11	-10	-10	-11	-11	-12	-12
M	-14	-14	-14	-14	-12	-12	-13	-13
B-C	-9	-9	-8	-8	-7	-7	-8	-8
V-O	-5	-5	-3	-3	2	2	-2	-2
J	-13	-13	-14	-14	-10	-10	-12	-12
L-M	-8	-8	-7	-7	-6	-6	-4	-4
F_1	0	0	0	0	0	0	0	0
F_2	0	0	0	0	0	0	0	0

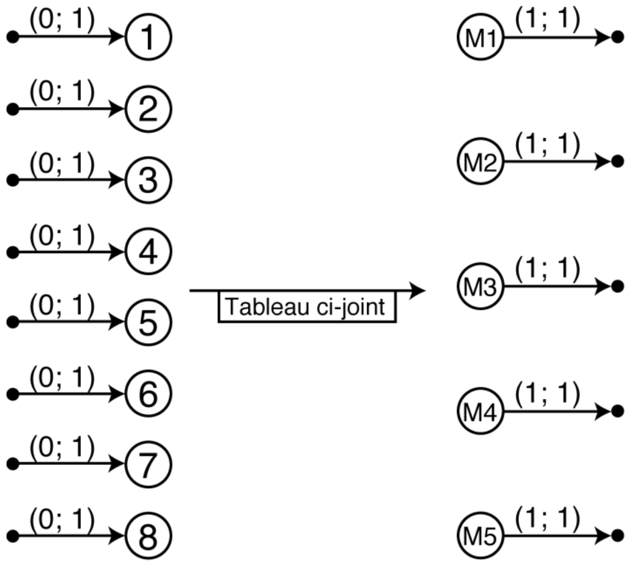
Le profit total s'élève à 61 000 $ au maximum. Le tableau suivant décrit une solution optimale.

Vol	Aire-heure de départ	Profit quotidien (en 000 $)
Rivière-du-Loup	1 - 13h	12
Matane	1 - 8h	14
Baie-Comeau	2 - 13h	8
Val-d'Or	2 - 6h	5
Jonquière	2 - 8h	14
Lac-Mégantic	1 - 6h	8
F_1	2 - 10h	0
F_2	1 - 10h	0

(b) Il suffit d'ajouter un arc $F_3 \rightarrow$ 3-6h. Le profit total s'élève alors à 62 000 $: Volauvent serait prête à débourser jusqu'à 1 000 dollars pour obtenir cette aire de débarquement supplémentaire.

12. La répartition de modules entre différents programmeurs.

Il s'agit d'affecter, au coût minimal, des employés à des modules. On peut résoudre ce problème comme un problème d'affectation en ajoutant des modules fictifs. On peut également, et c'est l'approche choisie ici, le résoudre comme un problème de transbordement dont les sommets émetteurs sont associés aux employés. Comme chacun d'eux exécutera au plus une tâche, tous les sommets émetteurs ont les bornes (0; 1). À chaque module j correspond un sommet récepteur Mj, dont les bornes sont (1; 1) car le module doit être réalisé. Le modèle graphique résultant est illustré ci-dessous. Les coûts des arcs $i \rightarrow$ Mj, où i = 1, ..., 8 et j = 1, ..., 5, sont obtenus en multipliant le salaire hebdomadaire de i par le nombre de semaines nécessaires à i pour compléter le module j; ces coûts sont indiqués dans un tableau adjacent à la figure. Il n'y a pas d'arc de la forme $i \rightarrow$ Mj, où i = 4, ..., 8 et j = 1, 2, de façon à respecter l'exigence de l'analyste.



Coût en (00$) à reporter sur l'arc $i \rightarrow M_j$

M_j / i	M1	M2	M3	M4	M5
1	140	126	126	126	112
2	144	144	132	126	120
3	144	140	126	120	120
4	–	–	165	132	132
5	–	–	112	120	120
6	–	–	128	128	120
7	–	–	128	128	112
8	–	–	120	120	105

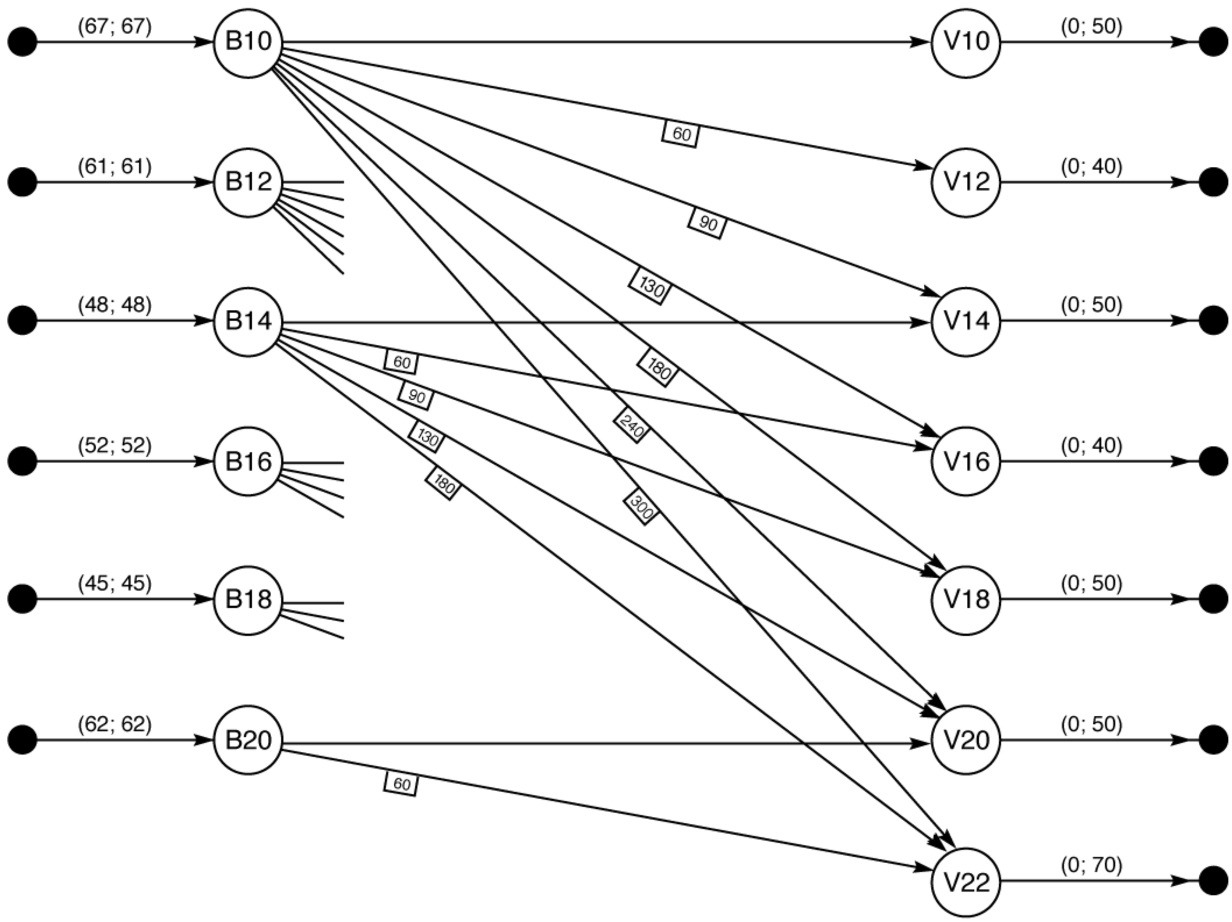
Note. Un tiret indique qu'il n'y a pas d'arc $i \rightarrow M_j$

Il en coûtera 60 700 $ au minimum pour réaliser les cinq modules. Le tableau ci-dessous décrit une solution optimale.

Module	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Employé	2	1	5	3	8
Coût (en $)	14 400	12 600	11 200	12 000	10 500

13. Air Madagascar

La figure ci-dessous représente certaines portions d'un réseau approprié pour analyser le problème auquel est confronté Air Madagascar ce 12 juillet : l'unité de flot est un détenteur de billet; les sommets émetteurs B10, B12, etc. correspondent aux billets vendus pour le vol associé et les sommets récepteurs V10, V12, etc., aux détenteurs de billets qui seront acceptés sur le vol partant à l'heure indiquée. Les arcs admettant B12, B16 ou B18 comme sommet initial ont été tronqués, afin d'alléger la figure.



Le tableau de la page suivante donne la liste des arcs, ainsi qu'une solution optimale. D'après cette solution, Air Madagascar devra verser 11 130 000 ariary au minimum en forfaits; le tableau suivant indique combien de retards devront subir les clients d'Air Madagascar.

Retard	**Vol quittant Antsiranana à**						**Total**
	10h	12h	14h	16h	18h	20h	
Aucun	50	40	48	25	29	40	232
2h	0	0	0	0	0	22	22
4h	2	0	0	0	16	-	18
6h	15	21	0	27	-	-	63
Total	67	61	48	52	45	62	

MOG5-13 Air Madagascar : données concernant les arcs et solution optimale

No	Nom	S. initial	S. terminal	Coût un.	Borne inf.	Borne sup.	Flot	Coût
1	Billets 10h	.	B10	0	67	67	67	0
2	Billets 12h	.	B12	0	61	61	61	0
3	Billets 14h	.	B14	0	48	48	48	0
4	Billets 16h	.	B16	0	52	52	52	0
5	Billets 18h	.	B18	0	45	45	45	0
6	Billets 20h	.	B20	0	62	62	62	0
7	Accepté 10h	B10	V10	0	0	.	50	0
8	Retard 10-12	B10	V12	60	0	.	0	0
9	Retard 10-14	B10	V14	90	0	.	2	180
10	Retard 10-16	B10	V16	130	0	.	15	1950
11	Retard 10-18	B10	V18	180	0	.	0	0
12	Retard 10-20	B10	V20	240	0	.	0	0
13	Retard 10-22	B10	V22	300	0	.	0	0
14	Accepté 12h	B12	V12	0	0	.	40	0
15	Retard 12-14	B12	V14	60	0	.	0	0
16	Retard 12-16	B12	V16	90	0	.	0	0
17	Retard 12-18	B12	V18	130	0	.	21	2730
18	Retard 12-20	B12	V20	180	0	.	0	0
19	Retard 12-22	B12	V22	240	0	.	0	0
20	Accepté 14h	B14	V14	0	0	.	48	0
21	Retard 14-16	B14	V16	60	0	.	0	0
22	Retard 14-18	B14	V18	90	0	.	0	0
23	Retard 14-20	B14	V20	130	0	.	0	0
24	Retard 14-22	B14	V22	180	0	.	0	0
25	Accepté 16h	B16	V16	0	0	.	25	0
26	Retard 16-18	B16	V18	60	0	.	0	0
27	Retard 16-20	B16	V20	90	0	.	0	0
28	Retard 16-22	B16	V22	130	0	.	27	3510
29	Accepté 18h	B18	V18	0	0	.	29	0
30	Retard 18-20	B18	V20	60	0	.	0	0
31	Retard 18-22	B18	V22	90	0	.	16	1440
32	Accepté 20h	B20	V20	0	0	.	40	0
33	Retard 20-22	B20	V22	60	0	.	22	1320
34	Vol 10h	V10	.	0	0	50	50	0
35	Vol 12h	V12	.	0	0	40	40	0
36	Vol 14h	V14	.	0	0	50	50	0
37	Vol 16h	V16	.	0	0	40	40	0
38	Vol 18h	V18	.	0	0	50	50	0
39	Vol 20h	V20	.	0	0	40	40	0
40	Vol 22h	V22	.	0	0	70	65	0

14. Les équipes de vérification des travaux de génie civil

Le réseau comprend trois types de sommets.

- Des sommets S1, S2, S3, S4 et S5 associés aux seniors.
- Des sommets J1, J2, J3, ..., J16 et J17 associés aux juniors.
- Des sommets Éq3, Éq4 et Éq5 pour traiter les conditions spéciales auxquelles sont soumis les juniors J15, J16 et J17.

Les arcs du réseau se regroupent en cinq catégories.

- Des arcs émetteurs • → Si, où i = 1, ..., 5, munis de bornes (2 ; 3).
- Des arcs récepteurs Jk → •, où k = 1, ..., 17 ; ces arcs sont munis de bornes (0 ; 2) quand $k \leq 12$; ils sont munis de bornes (0 ; 1) quand k = 13, 14, et munis de bornes (1 ; 2) quand k = 15, 16 et 17.
- Des arcs Si → Jk, où i = 1, ..., 5 et k = 1, 2, ..., 14 ; ces arcs sont munis de bornes (0 ; 1) et leur coût unitaire est égal à la somme pondérée des avis d'intérêt pertinents dans les deux tableaux de l'énoncé. Une solution admissible dans laquelle le flot de l'arc Si → Jk est égal à 1 recommande que le junior Jk fasse partie de l'équipe du senior Si.
- Des arcs Si → Éqi, où i = 3, 4, 5 ; ces arcs sont munis de bornes (0 ; 2).
- Des arcs Éqi → Jk, où i = 3, 4, 5 et k = 15, 16 et 17 ; ces arcs sont munis de bornes (0 ; 1) ; leur coût unitaire est égal à la somme pondérée des avis d'intérêt pertinents dans les deux tableaux de l'énoncé.

(a) Le poids associé à l'avis du senior est le double de celui du junior. Par exemple, le coût unitaire de l'arc S1 → J1 est égal à 2 + (2 × 1) = 4 ; de même, celui de l'arc S1 → J4 est égal à 4 + 2 × (–6) = –8.

Nous avons utilisé le fichier Gabarit-Reseau.xls, en sélectionnant l'option «Max». Le tableau ci-dessous décrit une solution optimale, pour laquelle la satisfaction pondérée des 22 personnes impliquées est égale à 164.

Senior	Juniors dans l'équipe du senior
S1	J6, J7, J11
S2	J4, J7, J14
S3	J1, J5, J16
S4	J2, J8, J15
S5	J9, J13, J17

(b) Le poids associé à l'avis du senior est le triple de celui du junior. Par exemple, le coût unitaire de l'arc S1 → J1 est égal à 2 + (3 × 1) = 5 ; de même, celui de l'arc S1 → J4 est égal à 4 + 3 × (–6) = –14.

Le tableau ci-dessous décrit une solution optimale, pour laquelle la satisfaction pondérée des 22 personnes impliquées est égale à 210.

Senior	Juniors dans l'équipe du senior
S1	J1, J2, J11
S2	J4, J7, J12
S3	J1, J14, J16
S4	J2, J8, J15
S5	J9, J13, J17

15. L'affectation de tracteurs à des remorques

(a) Le réseau utilisé comporte :

- 5 sommets émetteurs, notés T1 à T5, sur lesquels sont reportées des bornes (1; 1);
- 10 sommets récepteurs, notés R0 à R9, sur lesquels sont reportés des bornes (0; 1) ainsi qu'un profit unitaire correspondant au revenu donné dans le premier tableau de l'énoncé;
- et, pour tout i et tout j, un arc Ti → Rj sur lequel est reporté un profit unitaire négatif obtenu en multipliant par -2 la distance donnée dans le second tableau de l'énoncé.

Noter que les revenus apparaissent comme des nombres positifs dans ce réseau, de sorte que nous devrons cliquer sur l'option Max pour le résoudre. Le tableau suivant décrit une solution optimale, dont le revenu net total s'élève à 17 656 $. Le revenu net d'une attribution est obtenue en retranchant le coût reporté sur l'arc Ti → Rj du revenu associé à l'arc virtuel Rj → •. Par exemple, pour la 2^{e}, 3200 – (2 × 26) = 3174.

Tracteur	**T1**	**T2**	**T3**	**T4**	**T5**
Remorque	R8	R6	R3	R0	R7
Revenu net	3796 $	3174 $	2970 $	3382 $	4334 $

(b) Deux modifications sont apportées au modèle.

- Enlever les arcs T1 → R7 et T1 → R8.
- Ajouter des sommets récepteurs G1, G2 et G3 pour représenter les régions 1, 2 et 3 respectivement. Remplacer l'arc virtuel Rj → • par un arc Rj → Gh, où h représente la région où est située la remorque Rj; sur cet arc Rj → Gh sont reportés les bornes (0; 1) et un profit unitaire correspondant au revenu brut associé à la remorque Rj. Enfin, ajouter des arcs virtuels Gh → • avec les bornes suivantes :

G1 → •   bornes = (1; 3)

G2 → •   bornes = (1; 3)

G3 → •   bornes = (2; 4).

Le revenu net total maximal diminue à 17 468 \$. Le tableau suivant décrit une solution optimale du modèle modifié.

Tracteur	**T1**	**T2**	**T3**	**T4**	**T5**
Remorque	R0	R6	R7	R3	R8
Revenu net	3308 \$	3174 \$	4350 \$	2986 \$	3650 \$

(c) Remplacer l'arc virtuel G3 → • par les deux arcs suivants :

G3 → •	profit unitaire = 0	bornes = (2; 2)
G3 → •	profit unitaire = -500	bornes = (0; 2).

Le revenu net total maximal diminue à 17 334 \$. Le tableau suivant décrit une solution optimale du modèle modifié.

Tracteur	**T1**	**T2**	**T3**	**T4**	**T5**
Remorque	R0	R8	R1	R3	R7
Revenu net	3308 \$	3796 \$	2910 \$	2986 \$	4334 \$

(d) **1re solution**. Compte tenu des contraintes imposées dans la question (b), la condition additionnelle signifie qu'exactement trois remorques au total seront ramassées dans les régions 1 et 3. Il en résulte que le nombre de remorques ramassées dans les régions 1, 2 et 3 sera exactement de 1, 2 et 2 respectivement. Il suffit donc de reporter des bornes (1; 1) sur l'arc G1 → • et des bornes (2; 2) sur les arcs G2 → • et G3 → •.

2e solution. Ajouter un sommet T. Remplacer les arcs virtuels G1 → • et G3 → • par les arcs suivants :

G1 → T	profit unitaire = 0	bornes = (1; 3)
G3 → T	profit unitaire = 0	bornes = (2; 2)
G3 → T	profit unitaire = -500	bornes = (0; 2)
T → •	profit unitaire = 0	bornes = (0; 3).

Cette fois, le revenu net total maximal diminue à 16 992 \$. Le tableau suivant décrit une solution optimale du modèle modifié.

Tracteur	**T1**	**T2**	**T3**	**T4**	**T5**
Remorque	R0	R8	R5	R3	R7
Revenu net	3308 \$	3796 \$	2568 \$	2986 \$	4334 \$

16. La location d'un yacht.

(a) Pour modéliser cette situation comme un problème de réseau, il suffit de considérer qu'une unité de flot transite entre les sommets correspondant au 1^er^ mai et au 31 août; que le flot sur l'arc associé à une proposition est égal à 1 si la proposition est retenue, et est nul sinon. Le sommet 1 est donc le seul sommet émetteur du réseau, le sommet 9 en est le seul sommet récepteur et tous les autres sommets sont des sommets de transbordement. Noter que les coûts unitaires de la figure apparaissant dans le manuel sont exprimés en centaines d'euros.

Pour compléter cette figure, on indique d'abord que les sommets 3, 5 et 7 correspondent respectivement au 1^er^ juin, au 1^er^ juillet et au 1^er^ août. En comparant la liste des propositions aux arcs présents dans la figure, on se rend compte qu'il faut ajouter un arc $3 \rightarrow 6$, de coût -70, associé à la proposition 13. En outre, de façon à forcer le sommet 1 à émettre une unité de flot et le sommet 9 à la recevoir, on ajoute à la figure des arcs de la forme $\bullet \rightarrow 1$ et $9 \rightarrow \bullet$ avec les bornes (1; 1).

Certains seraient portés à s'arrêter là et à résoudre le problème de transbordement correspondant. On obtient alors un profit maximal de 26 500 euros. Toutefois, en analysant plus en détail la figure proposée, on se rend compte que certains ensembles de propositions, qui sont possibles en réalité, ne peuvent être associés à aucune solution admissible du problème de transbordement décrit par la figure donnée dans l'énoncé du problème. Ainsi :

- les propositions 12 et 16 ne pourront être choisies, car aucun arc n'admet le sommet 3 comme sommet terminal ;
- on ne pourra retenir *à la fois* les propositions 4 et 5, car la figure ne contient aucun chemin entre les sommets 6 et 7 ;
- toute proposition se terminant à la mi-août devra être rejetée, car aucun arc n'admet le sommet 8 comme sommet initial..

Et rien n'indique a priori que la solution optimale réelle ne correspond pas à l'une de ces situations. Le vice majeur de la figure de l'énoncé est qu'elle ne permet pas que le yacht *ne soit pas loué* pendant une certaine période. Pour remédier à cette incorrection, il suffit d'adjoindre à la figure proposée des arcs $2 \rightarrow 3$, $6 \rightarrow 7$, $7 \rightarrow 8$ et $8 \rightarrow 9$ de coût nul.

Ce problème a été résolu à l'aide du gabarit pour les modèles de réseau. Le tableau ci-dessous donne la plage du gabarit décrivant les arcs du modèle graphique utilisé, ainsi que la solution optimale obtenue. Le plaisancier retirera le profit maximal de 27 000 euros en acceptant les propositions 9, 15, 16, 17 et 18, ou encore les propositions 1, 5, 9, 16 et 17. Noter que le yacht ne sera pas loué durant la deuxième quinzaine de mai.

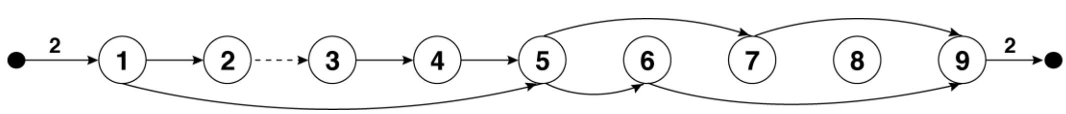
No	Nom	S. initial	S. terminal	Coût un.	Borne inf.	Borne sup.	Flot	Coût
1	PROPOS 01	5	7	-60	0	.	0	0
2	PROPOS 02	5	9	-90	0	.	0	0
3	PROPOS 03	1	9	-180	0	.	0	0
4	PROPOS 04	5	6	-30	0	.	0	0
5	PROPOS 05	7	9	-55	0	.	0	0
6	PROPOS 06	6	8	-60	0	.	0	0
7	PROPOS 07	2	6	-80	0	.	0	0
8	PROPOS 08	1	8	-175	0	.	0	0
9	PROPOS 09	1	2	-70	0	.	1	-70
10	PROPOS 10	1	4	-75	0	.	0	0
11	PROPOS 11	1	5	-100	0	.	0	0
12	PROPOS 12	3	5	-55	0	.	0	0
13	PROPOS 13	3	6	-70	0	.	0	0
14	PROPOS 14	2	4	-45	0	.	0	0
15	PROPOS 15	6	9	-85	0	.	1	-85
16	PROPOS 16	3	4	-50	0	.	1	-50
17	PROPOS 17	4	5	-35	0	.	1	-35
18	PROPOS 18	5	6	-30	0	.	1	-30
19	N-LOC 2-3	2	3	0	0	.	1	0
20	N-LOC 6-7	6	7	0	0	.	0	0
21	N-LOC 7-8	7	8	0	0	.	0	0
22	N-LOC 8-9	8	9	0	0	.	0	0
23	FLOT ÉMIS	.	1	0	1	1	1	0

Note. Les propositions 4 et 18 sont similaires et génèrent deux arcs de même coût –30 entre les sommets 5 et 6. On pourrait ici omettre l'un de ces arcs, sans affecter le plan optimal de location du yacht. Cependant, lorsqu'il s'agira, comme en (b), de planifier la location de 2 yachts, il faudra soit inclure un 2^{e} arc entre 5 et 6, soit reporter une borne supérieure de 2 sur l'arc 5 → 6 représentant les 2 propositions.

(b) En (a), nous avons vu que le chemin suivi par l'unité de flot indique l'ensemble des propositions à retenir. Ici, deux ensembles de propositions doivent être déterminés, un pour chaque yacht. Il est donc naturel d'envoyer maintenant deux unités de flot dans le réseau : les bornes inférieures et supérieures associées aux arcs • → 1 et 9 → • prennent donc cette fois la valeur 2. De plus, si aucune borne supérieure n'était spécifiée sur les autres arcs du réseau, il serait possible que le flot circulant sur l'arc associé à une proposition prenne la valeur 2; or, une proposition ne peut être retenue que pour un seul des deux yachts; il faut donc ici reporter les bornes (0; 1) sur chaque arc correspondant à une proposition. Enfin, il faut adjoindre au modèle des arcs 1 → 2, 3 → 4, 4 → 5 et 5 → 6 de coût nul. Le tableau ci-dessous donne la plage du gabarit décrivant les arcs du modèle graphique utilisé, ainsi que la solution optimale obtenue.

No	Nom	S. initial	S. terminal	Coût un.	Borne inf.	Borne sup.	Flot	Coût
1	PROPOS 01	5	7	-60	0	1	1	-60
2	PROPOS 02	5	9	-90	0	1	0	0
3	PROPOS 03	1	9	-180	0	1	0	0
4	PROPOS 04	5	6	-30	0	1	1	-30
5	PROPOS 05	7	9	-55	0	1	1	-55
6	PROPOS 06	6	8	-60	0	1	0	0
7	PROPOS 07	2	6	-80	0	1	0	0
8	PROPOS 08	1	8	-175	0	1	0	0
9	PROPOS 09	1	2	-70	0	1	1	-70
10	PROPOS 10	1	4	-75	0	1	0	0
11	PROPOS 11	1	5	-100	0	1	1	-100
12	PROPOS 12	3	5	-55	0	1	0	0
13	PROPOS 13	3	6	-70	0	1	0	0
14	PROPOS 14	2	4	-45	0	1	0	0
15	PROPOS 15	6	9	-85	0	1	1	-85
16	PROPOS 16	3	4	-50	0	1	1	-50
17	PROPOS 17	4	5	-35	0	1	1	-35
18	PROPOS 18	5	6	-30	0	1	0	0
19	N-LOC 1-2	1	2	0	0	.	0	0
20	N-LOC 2-3	2	3	0	0	.	1	0
21	N-LOC 3-4	3	4	0	0	.	0	0
22	N-LOC 4-5	4	5	0	0	.	0	0
23	N-LOC 5-6	5	6	0	0	.	0	0
24	N-LOC 6-7	6	7	0	0	.	0	0
25	N-LOC 7-8	7	8	0	0	.	0	0
26	N-LOC 8-9	8	9	0	0	.	0	0
27	FLOT ÉMIS	.	1	0	2	2	2	0
28	FLOT REÇU	9	.	0	2	2	2	0

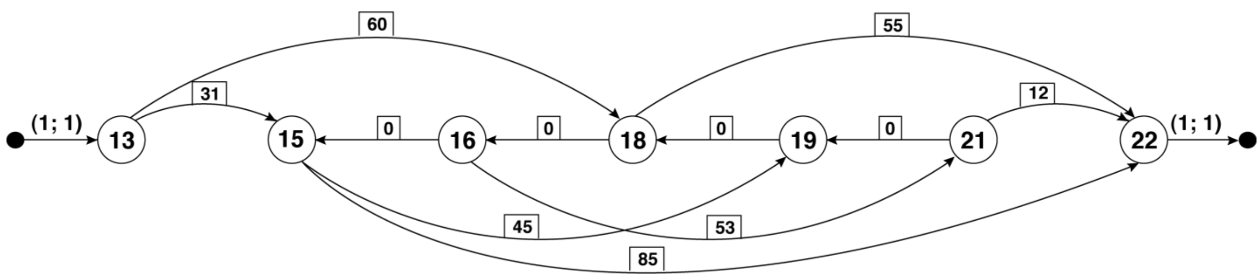
Le profit total s'élève cette fois à 48 500 euros. La figure suivante donne un réseau décrivant l'ensemble des arcs pour lesquels le flot est non nul (l'arc en pointillé indique que l'un des yachts n'est pas loué entre le 16 et le 31 mai). Le trajet du haut correspond aux propositions 1, 5, 9, 16 et 17 qui constituent l'une des listes optimales obtenues en (a); celui du bas, 1 $\to$ 5 $\to$ 9, correspond aux propositions 4, 11 et 15.



17. L'horaire des employés d'un cinéma le jour de Noël.

(a) Les arcs du réseau apparaissant dans l'énoncé représentent chacun l'offre d'une caissière. Le flot sur un tel arc indique si l'offre est acceptée ou non : quand le flot est égal à 1, l'offre est acceptée ; quand le flot est nul, l'offre est refusée.

On complète le réseau de l'énoncé de la façon suivante. Les sommets 13 et 22 agiront l'un comme sommet émetteur, l'autre comme sommet récepteur : on ajoute donc des arcs virtuels $\bullet \to 13$ et $22 \to \bullet$ de bornes (1; 1). On ajoute également des arcs $i \to i$- , où i- est le sommet immédiatement à gauche du sommet i : ces arcs traduisent graphiquement la possibilité que la période de travail d'une caissière ne coïncide pas avec celle proposée par la caissière, mais soit moins étendue. La figure ci-dessous illustre le modèle graphique associé à ce problème.



Noter qu'il serait logique de reporter sur les arcs associés aux offres les bornes (0;1), mais que celles-ci sont redondantes ici puisqu'une seule unité de flot est émise et transite dans le réseau. Le modèle a été résolu à l'aide du gabarit pour les modèles de réseau. Une solution optimale consiste à choisir les offres 1 et 5 correspondant aux arcs $13 \to 18$ et $18 \to 22$, pour un coût minimal de 115 \$.

Note. Il est également possible de résoudre ce problème par un réseau analogue à celui utilisé pour Air Taxi. On conserve les sommets 13, 15, 16, 18, 19, 21 et 22. Entre deux sommets successifs dans cette liste on trace un arc sur lequel sont reportées des bornes (1; 7). De plus, à chacun de ces sommets est associé un arc virtuel $H \to \bullet$ de bornes (s; s), où s est le nombre d'offres qui se terminent à H heures. Par exemple, les bornes de l'arc $22 \to \bullet$ sont (3; 3), et celles de $21 \to \bullet$ sont (1; 1). Noter que les arcs $13 \to \bullet$ et $16 \to \bullet$ peuvent être omis, car leurs bornes sont (0; 0).

Enfin, chaque offre d'une caissière est traduite dans le réseau par 3 arcs. Convenons de noter s_i le salaire demandé par la caissière n° i, et A_i (resp. B_i) le début (resp. la fin) de la période pendant laquelle elle a offert d'être présente. On associe à l'offre n° i un arc virtuel $\bullet \to C_i$ affecté de bornes (1; 1), un arc $C_i \to A_i$ sur lequel est reporté un coût de s_i et un arc $C_i \to B_i$. Par exemple, l'offre n° 1 donne lieu à un arc virtuel $\bullet \to C_1$ de bornes (1; 1), à un arc $C_1 \to 13$ de coût 60 et à un arc $C_1 \to 18$ sans coût ni bornes. Le flot de 1 unité émis par le sommet C_i transitera soit par $C_i \to A_i$ soit par $C_i \to B_i$: dans le premier cas, l'offre de la caissière n° i sera acceptée, dans le second, elle sera refusée.

(b) Le réseau est analogue à celui construit en (a), sauf que les bornes sur les arcs virtuels sont (2; 2). De plus, on doit reporter des bornes (0; 1) sur les arcs associés aux propositions des projectionnistes.

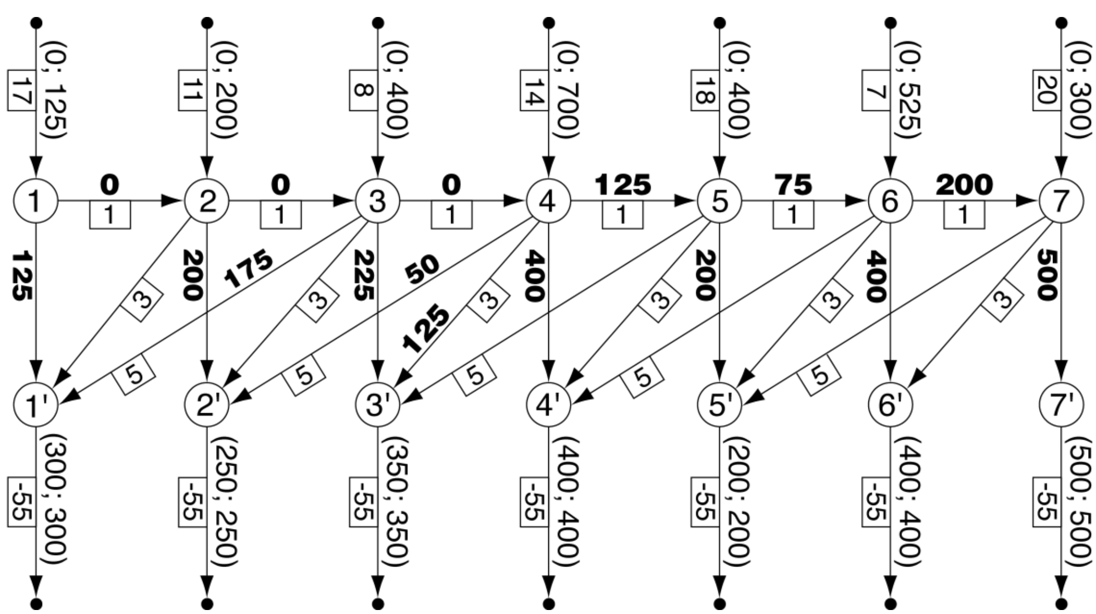
Le modèle a été résolu à l'aide du gabarit pour les modèles de réseau. Le coût minimal d'embauche des 2 projectionnistes de 13 heures à 23 heures est de 307 $ et s'obtient en acceptant les offres 2, 3, 5, 6 et 7 : la présence d'un 1^er^ projectionniste est assurée par les offres 2 et 5, qui couvrent les périodes de 13 à 19 heures et de 19 à 23 heures ; les offres 6, 3 et 7 garantissent qu'un 2^e^ projectionniste sera présent pendant les périodes de 13 à 17 heures, de 16 à 19 heures et de 18 à 23 heures respectivement. Noter que ces périodes se chevauchent de 16 à 17 heures et de 18 à 19 heures; que les offres 6, 3 et 7 n'auraient pu être choisies si les arcs 17 → 16 et 19 → 18 n'avaient pas été ajoutés au réseau.

18. L'importation de grenadilles.

Un sommet émetteur est associé à tout jour *j* de la période considérée. Sur l'arc virtuel • → *j* sont reportés des bornes (0; m_j) et un coût unitaire c_j, où m_j et c_j sont les données du 1er tableau associées au jour *j*. Un arc *j* → *j*+1 reliant les sommets correspondant à deux jours consécutifs traduit la possibilité de garder sous réfrigération les fruits en surplus durant le jour *j*.

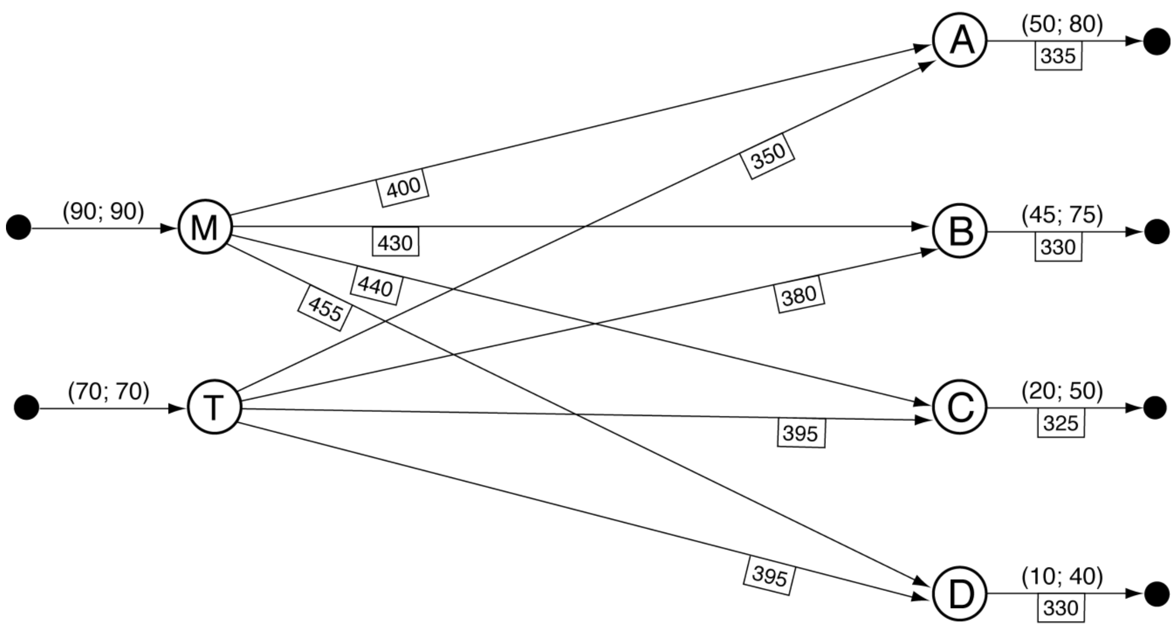
Les commandes du jour *j* sont représentées par un arc virtuel *j* ' → • qui émerge non pas du sommet *j*, mais d'un sommet *j* ' relié à *j* par un arc *j* → *j* '. Ce dédoublement de *j* permet de traiter séparément les commandes prévues pour le jour *j* mais que Gilles honorera le lendemain ou le surlendemain : en effet, la remise de 3 euros/quintal pour un retard de 1 jour est reportée sur les arcs de la forme *j*+1 → *j* '; de même les arcs de la forme *j*+2 → *j* ' traduisent la possibilité de remplir certaines commandes 2 jours après la date convenue.

Le réseau est reproduit ci-dessous. Une solution optimale a été reportée en gras sur la figure ; Gilles de Paris retirera 100 400 euros s'il applique cette stratégie.

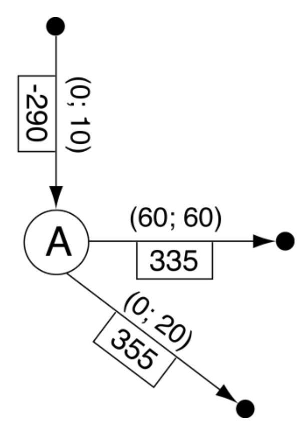


19. Le voyagiste et les forfaits dans les Rocheuses.

(a) Voici un réseau où l'on ne tient pas compte des pénalités.



(b) L'arc virtuel A → • associé au site A est remplacé par l'ensemble des 3 arcs virtuels qui est reproduit à droite. Le coût –290 sur l'arc virtuel • → A est fixé de façon à ce que la somme –290 + 335 = 45 sur le chemin • → A → • soit égale à la pénalité par client en deça de la cible en A. Une substitution analogue est faite pour les arcs virtuels B → •, C → • et D → • émergeant des autres sites.



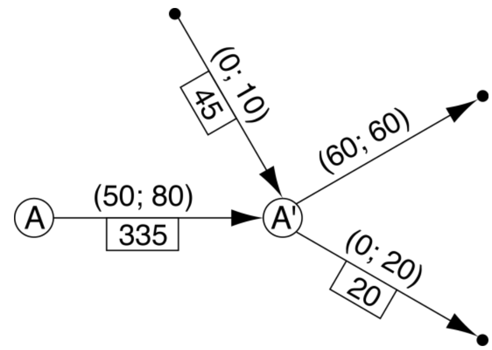
Notes. Le coût minimal engagé par le voyagiste est de 116 350 $ dans le cas du réseau de la question (a). Ce coût minimal augmente à 117 075 $ quand on tient compte des pénalités. Voici une solution optimale du réseau de la question (b) :

$$x_{MA} = 60 \quad \text{et} \quad x_{MC} = 30 \quad \text{et} \quad x_{TA} = 5 \quad \text{et} \quad x_{TC} = 55 \quad \text{et} \quad x_{TD} = 10.$$

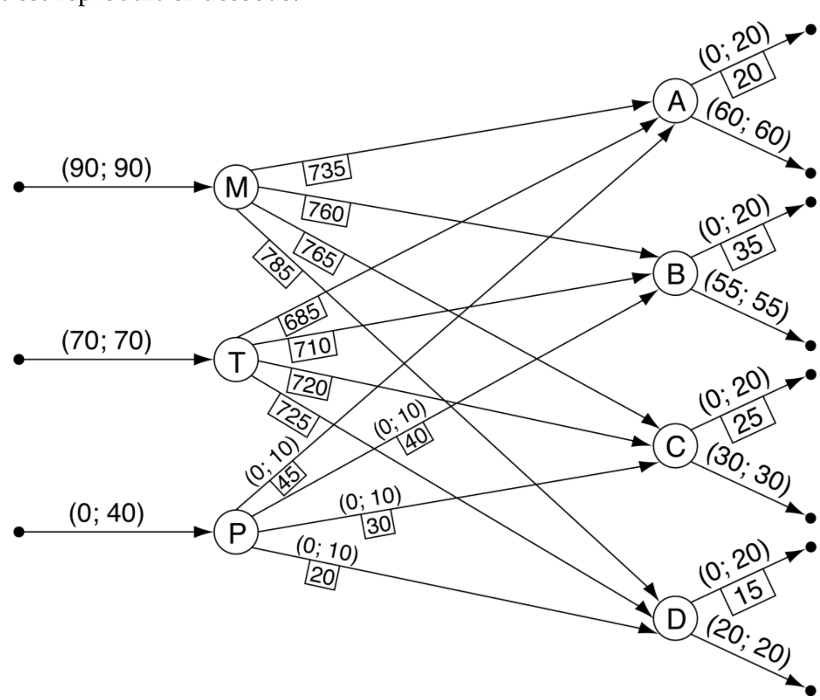
Cette solution implique un surplus de 5 voyageurs en A et une pénurie de 10 voyageurs en D.

Le problème admet plusieurs représentations graphiques. Nous donnons ci-dessous deux autres modèles graphiques.

Solution 2. Le réseau de la question (a) reste le même. À la question (b), on remplace l'arc virtuel $A \to \bullet$ associé au site A par l'ensemble des arcs qui est reproduit à droite. L'arc $A \to A'$ force le nombre de voyageurs présents à respecter la fourchette (50; 80). L'arc virtuel $\bullet \to A'$ fait entrer des voyageurs virtuels dans le réseau si le nombre de voyageurs présents est inférieur à la cible 60. Enfin, les deux arcs $A' \to \bullet$ permettent de traiter séparément les voyageurs en sus de la cible et de leur imputer une pénalité. Dans cette approche, contrairement à la précédente, le coût du forfait est reporté sur l'arc $A \to A'$ et est séparé des pénalités qui, elles, sont reportées sur les arcs virtuels $\bullet \to A'$ et $A' \to \bullet$.

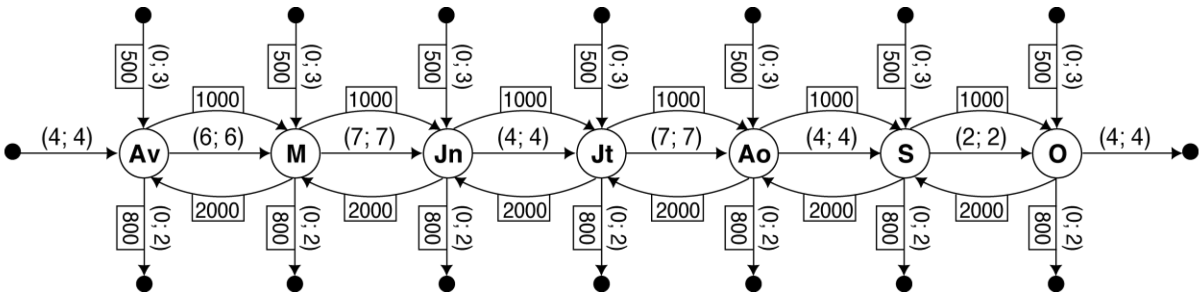


Solution 3. Dans le réseau de la question (a), le coût unitaire sur les arcs entre villes et sites correspond au total du prix du billet et de celui du forfait. Par exemple, sur l'arc $M \to A$ est reporté un coût de 400 + 335 = 735. Évidemment, aucun coût n'est alors associé à l'arc virtuel $A \to \bullet$. À la question (b), on ajoute un 3^{e} sommet émetteur P, lié à chacun des 4 sites par un arc de bornes (0; 10) sur lequel est reporté comme coût unitaire la pénalité exigée par le site pour chaque voyageur en deçà de la cible. Enfin, à chaque site sont associés 2 arcs virtuels, l'un de bornes (c ; c) où c est la cible déterminée par les gens du site, l'autre de bornes (0; 20) et dont le coût unitaire est égal à la pénalité par voyageur en sus de la cible. Le réseau résultant est reproduit ci-dessous.

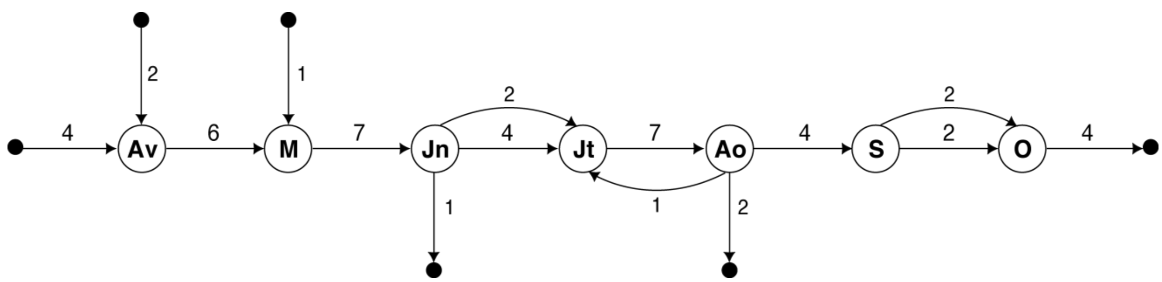


20. Les monteurs de ligne.

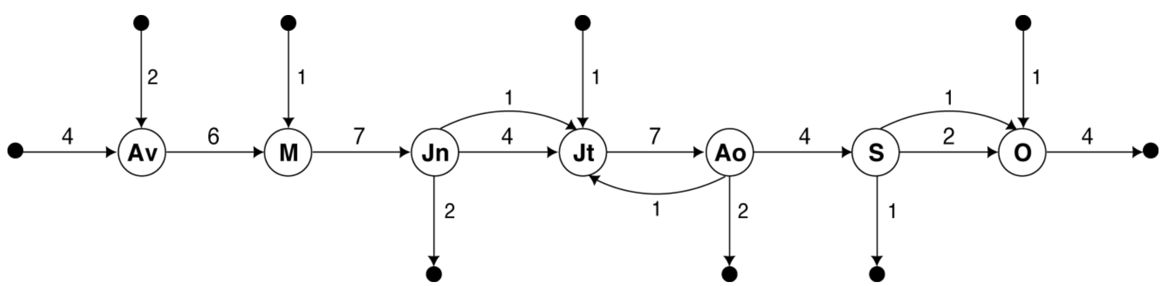
(a) Voici un réseau qui représente le problème auquel est confronté Hydro-Québec.



Une solution optimale est décrite par le réseau ci-dessous. Les coûts reliés à la présence des monteurs pour la période de mai à septembre seront de 9 900 $ si Hydro-Québec implante cette solution optimale.



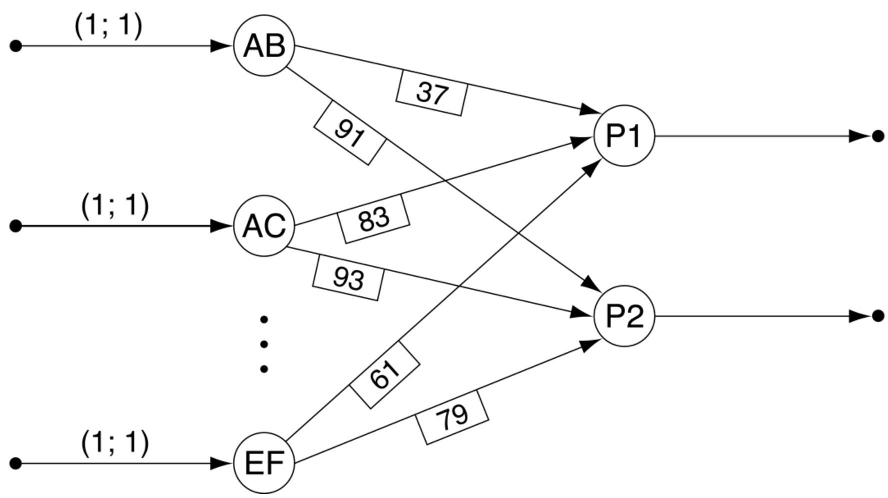
(b) Il suffit de reporter des bornes (0; 1) sur tous les arcs de coût 1 000 ou 2 000. La présence des monteurs de mai à septembre entraînera une dépense de 10 500 $ si Hydro-Québec implante la solution optimale suivante, qui assure un maximum de 1 personne en sus ou en deçà du nombre requis pendant un mois donné.



21. Les plaques tournantes.

(a) Comme le nombre d'unités de courrier n'influe pas sur la décision, on recourt au réseau simplifié reproduit ci-dessous.

- ***Sommets émetteurs :*** Le réseau comprend 6 × 5 / 2 = 15 sommets émetteurs, un pour chaque couple (*I*; *J*), où *I* et *J* parcourent l'ensemble {A, B, C, D, E, F} et où *I* précède *J*. Il est en effet inutile ici de différencier (*I*; *J*) et (*J*; *I*) car si l'un est affecté à P*h*, l'autre le sera aussi à cause de la symétrie du problème. Sur les arcs virtuels • → (*I*; *J*) sont reportées des bornes (1; 1).
- ***Sommets récepteurs :*** Le réseau comprend 2 sommets récepteurs, P1 et P2. Les arcs virtuels P*h* → • n'ont ni bornes ni coût unitaire.
- ***Sommets de transbordement :*** Il n'y a aucun sommet de transbordement.



- ***Arcs du réseau :*** Outre les arcs virtuels, le réseau comprend des arcs (*I*; *J*) → P*h*, dont les coûts unitaires sont donnés dans le tableau ci-dessous. Les nombres au-dessus de la diagonale représentent les coûts à reporter sur les arcs (*I*; *J*) → P1; au-dessous de la diagonale sont donnés les coûts associés aux arcs (*I*; *J*) → P2. Illustrons comment calculer ces coûts à l'aide d'un cas particulier :

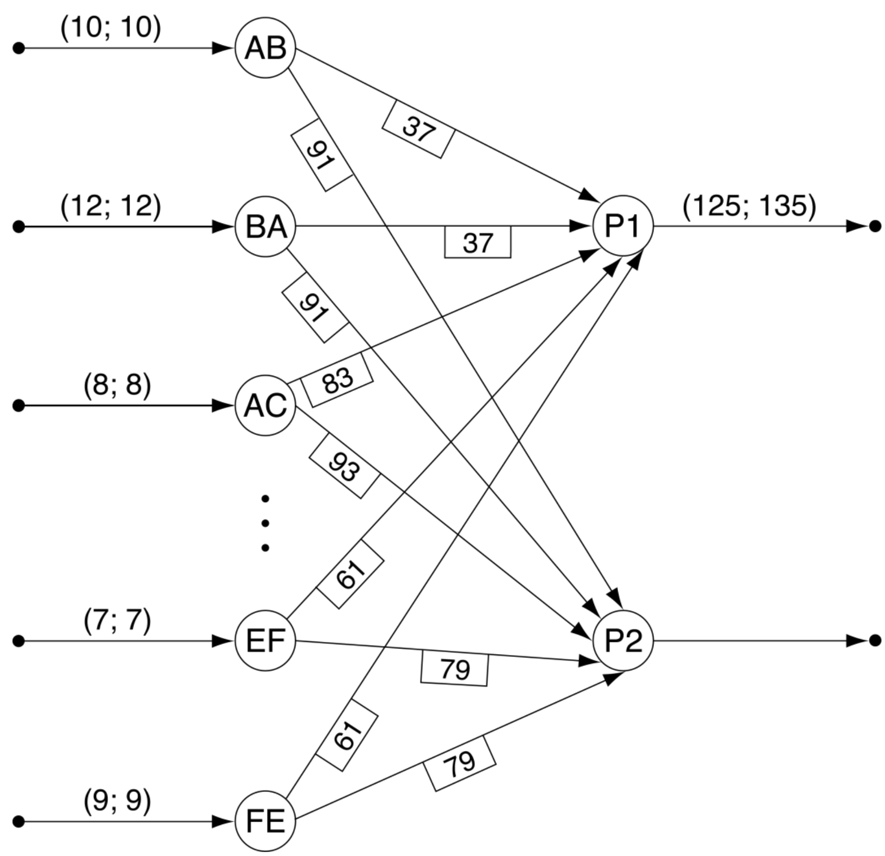
pour l'arc (A; B) → P1, coût = d(A; P1) + d(B; P1) = 9 + 28 = 37

pour l'arc (A; B) → P2, coût = d(A; P2) + d(B; P2) = 55 + 36 = 91.

	A	B	C	D	E	F
A	–	37	83	84	63	16
B	91	–	102	103	82	35
C	93	74	–	149	128	81
D	66	47	49	–	129	82
E	77	58	60	33	–	61
F	112	93	95	68	79	–

Une solution optimale consiste à faire transiter par la plaque P1 tout le courrier associé aux sommets AB, AC, AE, AF, BF, CF et EF, et par P2 le courrier associé aux 8 autres sommets. La longueur totale des déplacements est de 2 × 831 = 1 662 hm, le facteur 2 reflétant le fait que la distance sur l'arc (I; J) → Ph doit être parcourue 2 fois en pratique, la première fois pour livrer le courrier de I à destination de J, la seconde pour livrer celui de J à destination de I.

(b) Cette fois le problème posé n'est pas tout à fait symétrique, à cause de la condition sur le nombre minimal de charges à peser en P1. Il faudra donc différencier ici (I; J) et (J; I), et le réseau comprendra 30 sommets émetteurs. Sur l'arc virtuel • → (I; J) sont reportées des bornes (a_{ij} ; a_{ij}), où a_{ij} est le nombre de charges complètes à transporter de I vers J, nombre apparaissant à l'intersection de la ligne I et de la colonne J dans le tableau de l'énoncé de la question (b). Sur l'arc virtuel P1 → • sont reportées des bornes (125; 135); l'arc virtuel P2 → • n'admet pas de bornes. Enfin, le coût unitaire utilisé à la question précédente pour l'arc (I; J) → Ph est repris ici pour les arcs (I; J) → Ph et (J; I) → Ph.



Une solution optimale consiste à affecter à la plaque P1 toutes les charges sur les routes AB, BA, AC, CA, AE, EA, AF, FA, BF, FB, CF, FC, FD, EF et FE; quant à la route DF, 6 des 14 charges transiteront par P1 et 8, par P2; enfin, seront affectées à P2 toutes les charges sur les 14 autres routes. Au total, 125 charges seront pesées en P1 et 134, en P2. La distance totale parcourue en charge par les camions sera de 14 158 hm.

(c) Il s'agit d'affecter conjointement les couples *IJ* et *JI* à l'une des plaques. On définit donc 15 variables binaires v_{IJ} , où $I < J$, de la façon suivante :

$v_{IJ} = 1$ si les charges de *I* vers *J* **et** de *J* vers *I* passent par P1.

La distance totale *z*, que l'on cherche à minimiser, se calcule ainsi :

$$z = 37(10+12)\, v_{\text{AB}} + 91(10+12)(1 - v_{\text{AB}}) + 83(8+7)\, v_{\text{AC}} + 93(8+7)\,(1 - v_{\text{AC}}) + \text{etc.}$$

$$z = 2002 - 1188\, v_{\text{AB}} + 1395 - 150\, v_{\text{AC}} + \text{etc.}$$

La fonction-objectif *z* se réécrit donc sous la forme linéaire :

$$z = \text{C} - 1188\, v_{\text{AB}} - 150\, v_{\text{AC}} + \text{etc.},$$

où C = 2002 + 1395 + etc. = 18 442 serait la distance totale à parcourir si toutes les charges transitaient par P2 et où le coefficient c_{IJ} de v_{IJ} représente l'écart entre affecter à P1 ou à P2 toutes les charges de *I* vers *J* **et** de *J* vers *I*. Le tableau suivant résume ces coefficients c_{IJ}.

AB	AC	AD	AE	AF	BC	BD	BE	BF	CD	CE	CF	DE	DF	EF
-1188	-150	342	-182	-1824	420	896	360	-638	1900	1020	-210	2592	308	-288

Le modèle comprend trois contraintes technologiques. La 1re fixe la constante C à la valeur 18 442. Les deux autres forcent le nombre total de charges à peser en P1 à appartenir à la fourchette 125-135 :

$$125 \leq 22\, v_{\text{AB}} + 15\, v_{\text{AC}} + \ldots + 16\, v_{\text{EF}} \leq 135.$$

Une solution optimale consiste à affecter à la plaque P1 les charges associées aux routes AB, BA, AC, CA, AE, EA, AF, FA, BF, FB, CF, FC, DF, FD, EF et FE; par P2 transiteront les charges associées aux autres routes. Au total, 133 charges seront pesées en P1 et 126, en P2. La distance totale parcourue en charge par les camions sera de 14 270 hm.

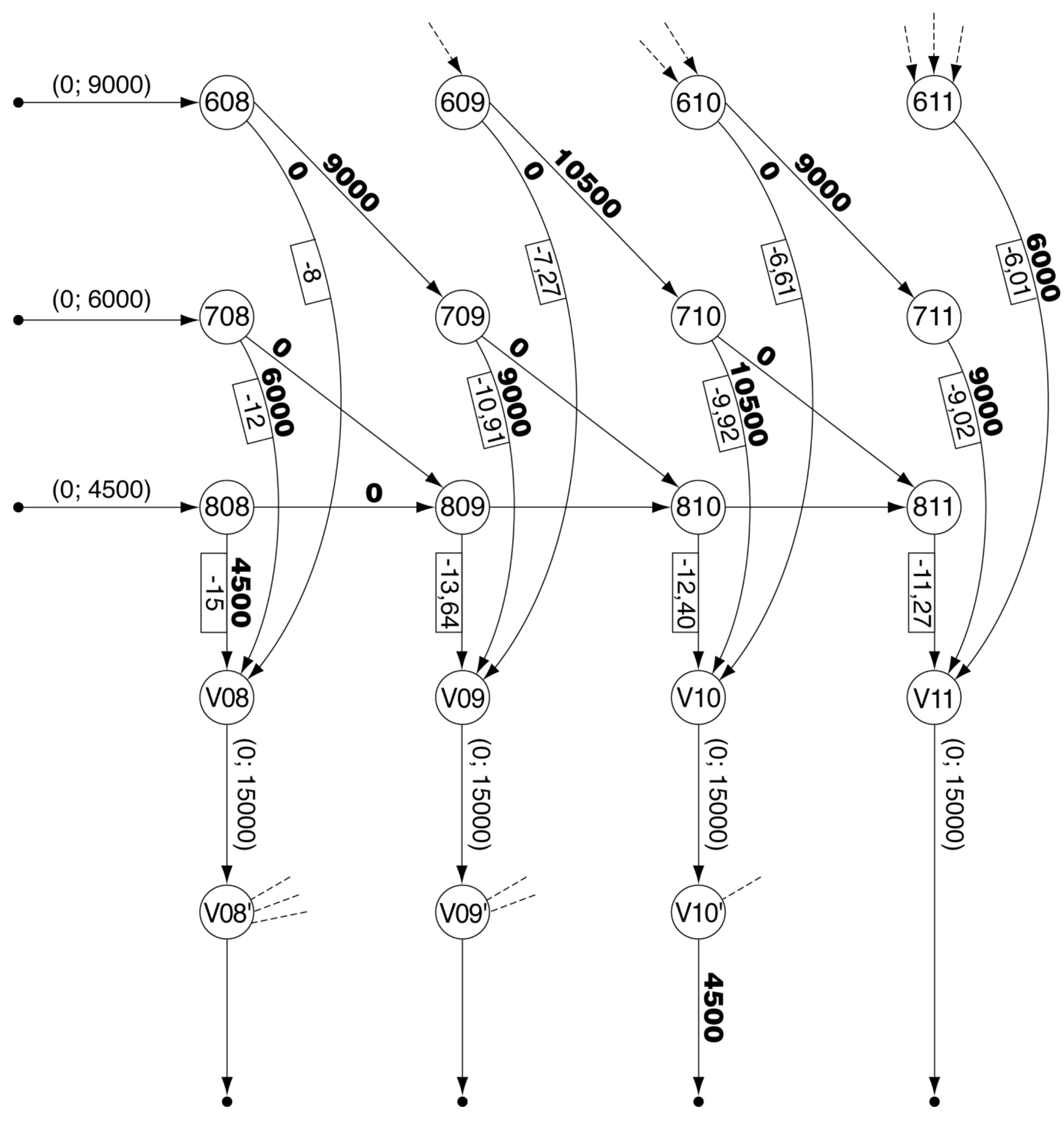
22. Les arbres de Noël.

Le flot est constitué d'arbres de Noël, sous forme soit de jeunes pousses provenant de la pépinière, soit d'arbres qui vieillissent de 1 an à chaque saison de croissance, soit d'arbres de différents âges abattus pour les mettre sur le marché.

- ***Sommets émetteurs :*** 608, 708 et 808. Le flot émis par ces trois sommets représente les arbres de différents âges présents dans la plantation à la date d'achat, en octobre 2008. On regroupe dans le réseau les arbres de 8 ans et plus, car ils sont vendus au même prix.
- ***Sommets récepteurs :*** V08', V09', V10' et V11. Le flot reçu par ces sommets représente les arbres abattus et non remplacés par des jeunes pousses provenant du pépiniériste.

Le sommet 608 injecte dans le réseau les 9 000 pousses de 6 ans présentes dans la plantation en octobre 2008. Ce flot se partage en deux parties à la sortie du sommet 608 : l'arc 608 $\rightarrow$ V08 correspond aux arbres de 6 ans abattus et vendus à l'automne 2008; l'arc 608 → 709, aux arbres de 6 ans conservés sur pied et qui auront 7 ans en 2009. Les arbres de différents âges vendus en 2008 sont regroupés au sommet V08 et transitent tous par l'arc V08 → V08', de façon à imposer une borne de 15 000 au nombre total d'arbres commercialisés cette année-là. De V08' émergent différents arcs : V08' → 609, V08' → 610 et V08' → 611 traduisent la possibilité de remplacer les arbres abattus en 2008 par des jeunes pousses dès l'année suivante, ou plus tard si cela est jugé à propos; l'arc V08' → • permet à PGL de laisser inutilisée une partie de l'espace libéré par abattage à l'automne 2008.

Le réseau est reproduit ci-dessous. Une solution optimale a été reportée en gras sur la figure; PGL retirera 352 710 $ si elle applique cette stratégie.

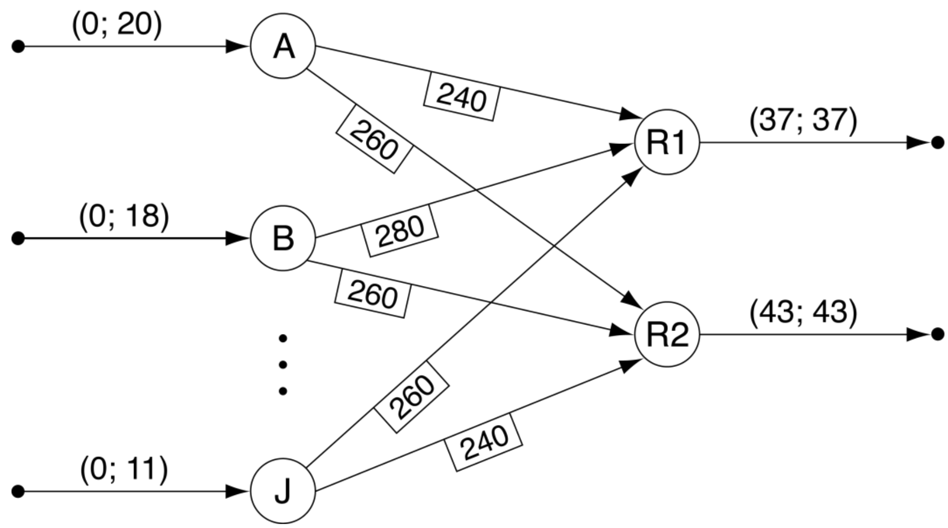


Note. Le réseau comprend également un arc V08 → 609 sur lequel est reporté un coût unitaire de 4,50, des arcs V08 → 610 et V09 → 610 de coût unitaire 4,09 ainsi que des arcs V08 → 611, V09 → 611 et V10 → 611 de coût unitaire 3,72.

Dans la stratégie optimale décrite sur la figure, le flot sur l'arc V08 → 609 est de 10 500 arbres; il est de 9 000 et 6 000 unités respectivement sur les arcs V09 → 610 et V10 → 611; enfin, il est nul sur V08 → 610, V08 → 611 et V09 → 611.

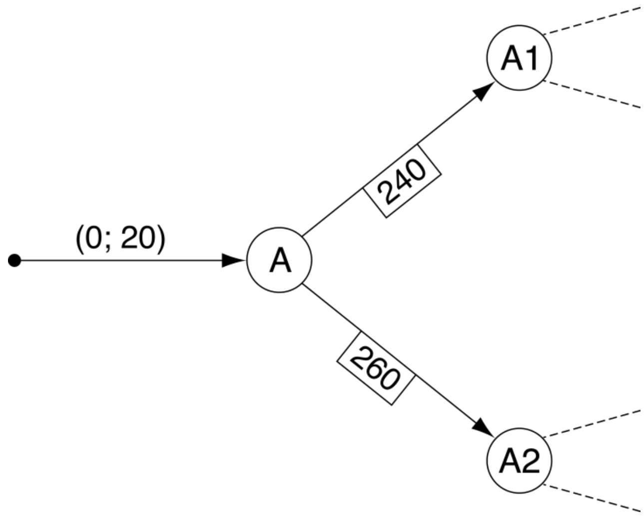
23. La Sonel.

(a) Un réseau qui représente le problème de la Sonel est donné à la page suivante. L'unité de flot est l'équipe de 8 personnes. Les sommets émetteurs sont les 10 entreprises qui ont répondu à l'appel d'offres; les sommets récepteurs, les 2 régions. Il n'y a aucun sommet de transbordement.

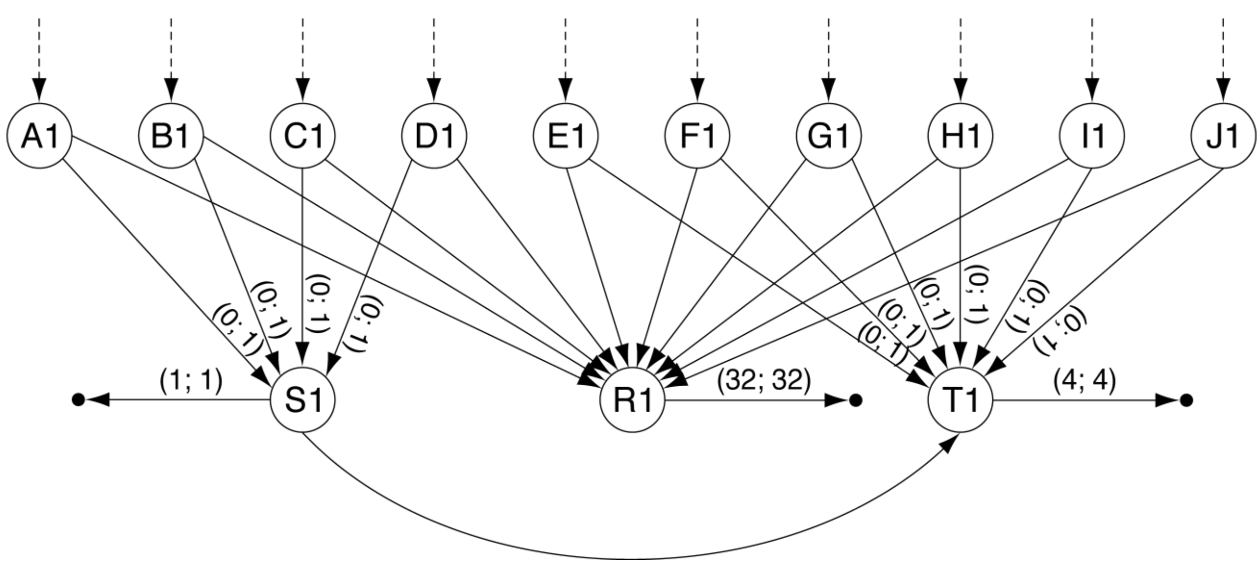


(b) Au réseau de la question (a) ajouter des sommets S1 et S2, ainsi que des arcs virtuels S1 → • et S2 → • de bornes (1; 1). Relier les sommets S*j* (où *j* = 1, 2) et *X* (où *X* = A, B, C, D) par un arc *X* → S*j* sur lequel est reporté le même coût que sur l'arc *X* → R*j*. Enfin, modifier ainsi les bornes des sommets récepteurs : reporter (36; 36) sur l'arc R1 → • et (42; 42) sur l'arc R2 → •.

(c) À nouveau, nous prenons comme point de départ le réseau de la question (a), que nous modifions de la façon suivante. Tout d'abord, le sommet émetteur *X* (où *X* = A, B, ..., J) n'est plus relié directement aux régions R1 et R2 : des sommets intermédiaires *X*1 et *X*2 sont ajoutés, ainsi que des arcs *X* → *X*1 et *X* → *X*2 sur lesquels sont reportés comme coût unitaire les forfaits annuels exigés par l'entreprise *X* pour une équipe dans les régions 1 et 2 respectivement. La figure ci-dessous représente la portion du réseau ainsi associée à l'entreprise A.



Par la suite, le réseau est scindé en deux strates, une pour chaque région. La figure ci-dessous représente celle pour la région 1. L'arc virtuel S1 → • force le choix d'au moins 1 entreprise dans le groupe {A, B, C, D}. Quant à l'arc T1 → • , il garantit que La Sonel fera affaire dans la région 1 avec au moins 4 entreprises autres que celle associée à l'arc S1 → • , c'est-à-dire avec au moins 5 entreprises en tout. Les bornes (0; 1) sur les arcs *X*1 → S1 (où *X* = A, B, C, D) et *X*1 → T1 (où *X* = E, F, G, H, I, J) assurent que les unités de flot ou équipes passant par T1 → • proviennent d'entreprises différentes. Enfin, l'arc S1 → T1 est nécessaire, sinon 4 des 5 entreprises à retenir devraient appartenir au groupe {E, F, G, H, I, J}, alors que rien dans l'énoncé n'interdit d'en choisir 3 dans ce groupe et 2 dans {A, B, C, D}.



24. Simiex.

Le réseau comprend 18 sommets et 66 arcs. Les sommets sont de deux types :

- A*m* et B*m* (où m = 1, 2, 3) représentent la production de l'usine A ou B durant le mois m ;
- P*jm* (où j = 1, 2, 3, 4 et m = 1, 2, 3) réfère à la demande au point de vente PV*j* durant le mois m.

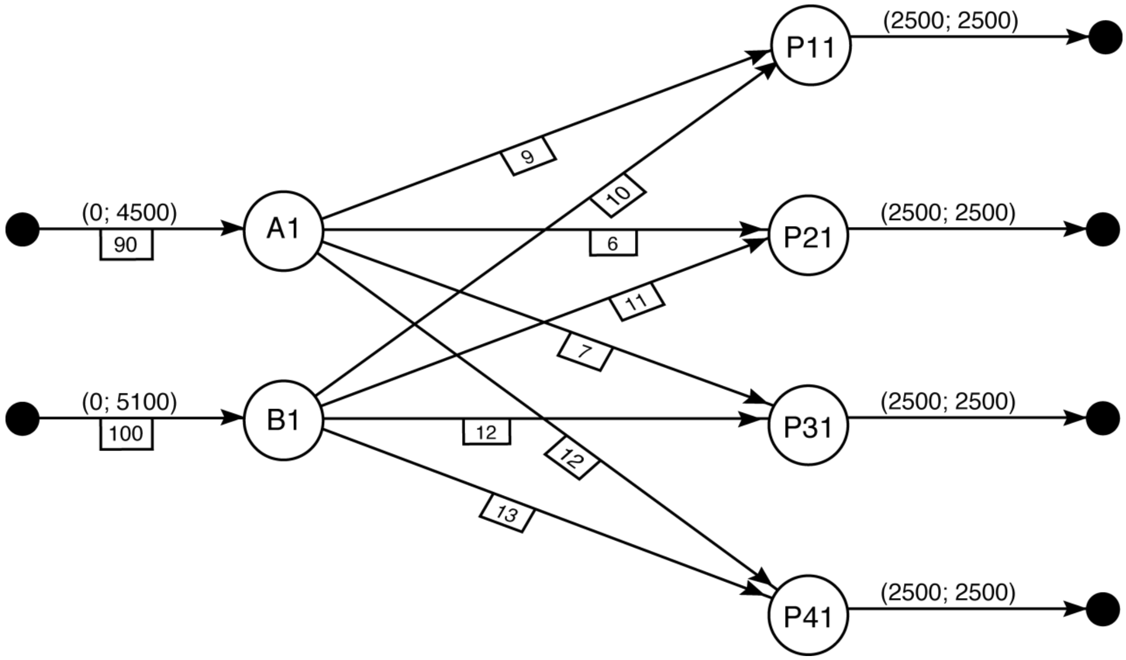
Les 66 arcs se regroupent en 5 blocs :

- les 6 arcs virtuels $\bullet \rightarrow$ A*m* et $\bullet \rightarrow$ B*m* indiquent combien d'unités seront fabriquées en chaque usine durant le mois m et rendues disponibles à la fin de ce mois ;
- les 24 arcs A*m* $\rightarrow$ P*jm* et B*m* $\rightarrow$ P*jm* correspondent à la livraison de consoles au point de vente PV*j* à la fin du mois m ;
- les 8 arcs P*jm* $\rightarrow$ P*jm'* , où $m' = m+1$ et m = 1, 2, traduisent la possibilité pour Simiex de livrer des consoles au point de vente PV*j* un mois à l'avance ;
- les 16 arcs A*m* $\rightarrow$ P*jm'* et B*m* $\rightarrow$ P*jm'* , où $m' = m-1$ et m = 2, 3, réfèrent à la possibilité de répondre à la demande au point de vente PV*j* avec un mois de retard ;
- les 12 arcs virtuels P*jm* $\rightarrow \bullet$ indiquent combien d'unités sont requises au point de vente PV*j* à la fin du mois m.

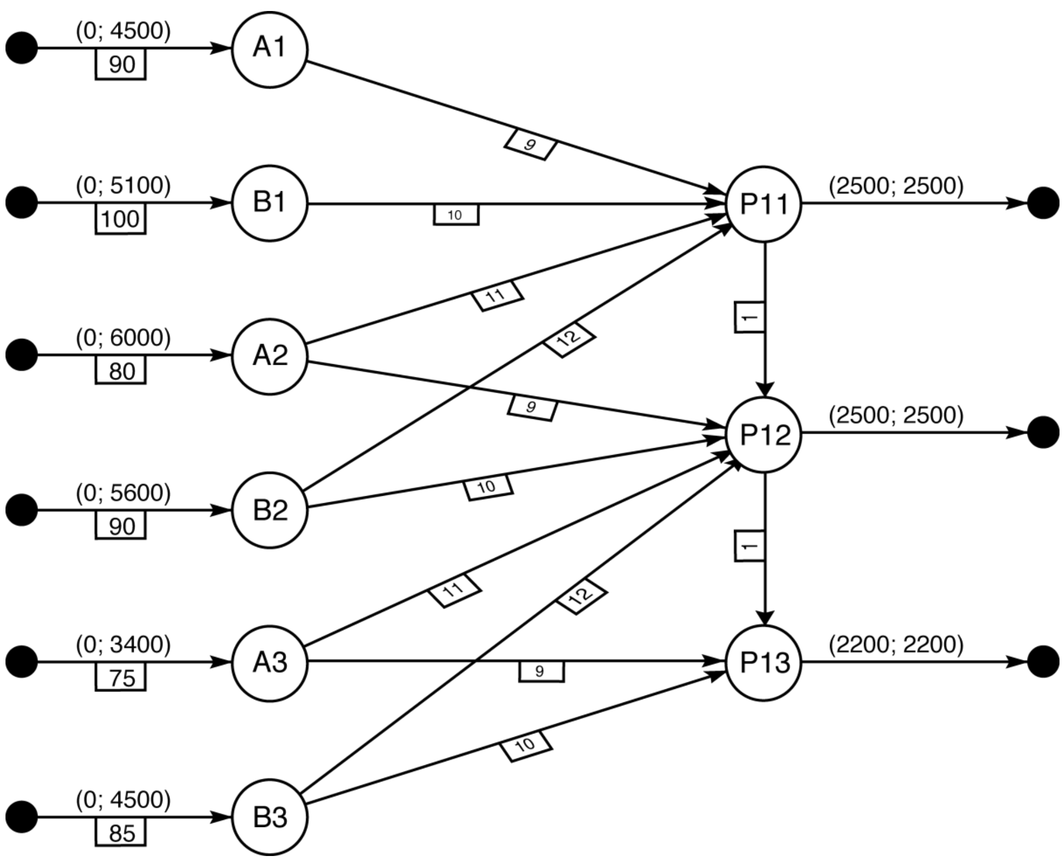
Le réseau dans son ensemble est plutôt lourd, mais des portions en sont reproduites à la page suivante : en particulier sont donnés les sous-réseaux associés aux sommets P*j*1 (mois 1) et aux sommets P1*m* (point de vente 1). Le 1er décrit les livraisons effectuées à la fin du mois 1, tandis que le 2e illustre la possibilité offerte à Simiex de livrer au point de vente 1 en retard ou à l'avance. Le tableau de la page 38 donne la plage du gabarit décrivant les arcs du modèle graphique (quelques lignes du gabarit sont omises, afin que le tableau entre dans une page; les arcs manquants, qui sont tous de la forme P*jm* $\rightarrow \bullet$, réfèrent aux livraisons promises aux différents points de vente à la fin des mois 1 et 2). Le tableau donne également une solution optimale, dont le coût est de 2 770 500 $. Cette solution optimale est résumée dans le tableau de la page 39; les astérisques accolés à certaines valeurs du mois 2 indiquent qu'une partie de la livraison correspondante sera affectée à la demande du mois précédent ou à celle du mois suivant.

- livraison de l'usine A au point de vente PV2 : 2 500 consoles selon l'entente initiale, 100 consoles en retard pour la demande du mois 1 et 900 à l'avance pour celle du mois 3 ;
- livraison de B à PV1: 2 500 consoles selon l'entente initiale et 200 consoles en retard pour la demande du mois 1 ;
- livraison de B à PV3: les 400 consoles serviront à combler, en retard, la demande du mois 1.

MOG5-24 Simiex : sous-réseau associé aux sommets P*j*1 (mois 1)



MOG5-24 Simiex : sous-réseau associé aux sommets P1*m* (point de vente 1)



MOG5-24 Simiex : description du chiffrier des données et solution optimale

Données concernant les arcs							Solution optimale	
No	Nom	S. initial	S. terminal	Coût un.	Borne inf.	Borne sup.	Flot	Coût
1	M1: DISP A	.	A1	90	0	4500	4500	405 000
2	M1: DISP B	.	B1	100	0	5100	4800	480 000
3	M2: DISP A	.	A2	80	0	6000	6000	480 000
4	M2: DISP B	.	B2	90	0	5600	5600	504 000
5	M3: DISP A	.	A3	75	0	3400	3400	255 000
6	M3: DISP B	.	B3	85	0	4500	4500	382 500
7	M1: LIVRA1	A1	P11	9	0	.	0	0
8	M1: LIVRA2	A1	P21	6	0	.	2000	12 000
9	M1: LIVRA3	A1	P31	7	0	.	2500	17 500
10	M1: LIVRA4	A1	P41	12	0	.	0	0
11	M1: LIVRB1	B1	P11	10	0	.	2500	25 000
12	M1: LIVRB2	B1	P21	11	0	.	400	4 400
13	M1: LIVRB3	B1	P31	12	0	.	0	0
14	M1: LIVRB4	B1	P41	13	0	.	1900	24 700
15	M2: LIVRA1	A2	P12	9	0	.	0	0
16	M2: LIVRA2	A2	P22	6	0	.	3400	20 400
17	M2: LIVRA3	A2	P32	7	0	.	2500	17 500
18	M2: LIVRA4	A2	P42	12	0	.	0	0
19	M2: LIVRB1	B2	P12	10	0	.	2500	25 000
20	M2: LIVRB2	B2	P22	11	0	.	0	0
21	M2: LIVRB3	B2	P32	12	0	.	0	0
22	M2: LIVRB4	B2	P42	13	0	.	2500	32 500
23	M3: LIVRA1	A3	P13	9	0	.	0	0
24	M3: LIVRA2	A3	P23	6	0	.	1200	7 200
25	M3: LIVRA3	A3	P33	7	0	.	2200	15 400
26	M3: LIVRA4	A3	P43	12	0	.	0	0
27	M3: LIVRB1	B3	P13	10	0	.	2200	22 000
28	M3: LIVRB2	B3	P23	11	0	.	100	1 100
29	M3: LIVRB3	B3	P33	12	0	.	0	0
30	M3: LIVRB4	B3	P43	13	0	.	2200	28 600
31	PV1:STOC12	P11	P12	1	0	.	0	0
32	PV2:STOC12	P21	P22	1	0	.	0	0
33	PV3:STOC12	P31	P32	1	0	.	0	0
34	PV4:STOC12	P41	P42	1	0	.	0	0
35	PV1:STOC23	P12	P13	1	0	.	0	0
36	PV2:STOC23	P22	P23	1	0	.	900	900
37	PV3:STOC23	P32	P33	1	0	.	0	0
38	PV4:STOC23	P42	P43	1	0	.	0	0
39	M1:RETARA1	A2	P11	11	0	.	0	0
40	M1:RETARA2	A2	P21	8	0	.	100	800
41	M1:RETARA3	A2	P31	9	0	.	0	0
42	M1:RETARA4	A2	P41	14	0	.	0	0
43	M1:RETARB1	B2	P11	12	0	.	0	0
44	M1:RETARB2	B2	P21	13	0	.	0	0
45	M1:RETARB3	B2	P31	14	0	.	0	0
46	M1:RETARB4	B2	P41	15	0	.	600	9 000
47	M2:RETARA1	A3	P12	11	0	.	0	0
48	M2:RETARA2	A3	P22	8	0	.	0	0
49	M2:RETARA3	A3	P32	9	0	.	0	0
50	M2:RETARA4	A3	P42	14	0	.	0	0
51	M2:RETARB1	B3	P12	12	0	.	0	0
52	M2:RETARB2	B3	P22	13	0	.	0	0
53	M2:RETARB3	B3	P32	14	0	.	0	0
54	M2:RETARB4	B3	P42	15	0	.	0	0
55	M1: DEMPV1	P11	.	0	2500	2500	2500	0
56	M1: DEMPV2	P21	.	0	2500	2500	2500	0
57	M1: DEMPV3	P31	.	0	2500	2500	2500	0
58	M1: DEMPV4	P41	.	0	2500	2500	2500	0
59	M2: DEMPV1	P12	.	0	2500	2500	2500	0
60	M2: DEMPV2	P22	.	0	2500	2500	2500	0
…								
66	M3: DEMPV4	P43	.	0	2200	2200	2200	0

MOG5-24 Simiex : description de la solution optimale

Usine	PV1	PV2	PV3	PV4	Total
	Mois 1				
A	0	2 400	2 100	0	4 500
B	2 300	0	0	2 500	4 800
Mois 2					
A	0	3 500*	2 500	0	6 000
B	2 700*	0	400*	2 500	5 600
Mois 3					
A	0	1 300	2 100	0	3 400
B	2 200	0	100	2 200	4 500

Note. Théoriquement, le réseau proposé permet de livrer de A2 à Pj2 en passant par Pj1, ce qui est illogique dans le contexte. Une telle situation ne se retrouvera cependant pas dans une solution optimale, car l'arc A2 $\rightarrow$ Pj2 y sera toujours préféré au chemin indirect A2 $\rightarrow$ Pj1 $\rightarrow$ Pj2 dont le coût unitaire est plus élevé. Cette remarque resterait valide si on remplaçait A par B ou le mois 2 par le mois 3. Il en est toujours ainsi dans ce problème, car toute livraison à l'avance ou en retard entraîne une augmentation des coûts. S'il arrivait qu'un chemin indirect, tel A2 $\rightarrow$ Pj1 $\rightarrow$ Pj2, s'avère moins couteux que le chemin direct A2 $\rightarrow$ Pj2 correspondant, il faudrait alors ajouter un 6^{e} bloc de 12 arcs, de la forme Pjm $\rightarrow$ P'jm; de plus, les 12 arcs virtuels du 5^{e} bloc émergeraient alors des sommets de la forme P'jm, tandis que les 16 arcs du 4^{e} bloc seraient incidents aux sommets de la forme P'jm.

25. La descente du Colorado en radeau.

(a) Ici, les sommets émetteurs sont associés aux familles et sont dénotés A, B, ..., G. Les sommets récepteurs, eux, correspondent aux radeaux et sont dénotés 1, 2, 3, 4 et 5. Il n'y a pas de sommet de transbordement. Les arcs du réseau sont de trois types.

- Les arcs de la forme $\bullet \rightarrow I$, où I = A, B, ..., G.
  Il s'agit d'un arc indiquant que le sommet I est un sommet émetteur. Puisqu'on veut que tous prennent place dans un radeau, les bornes inférieure et supérieure d'un tel arc sont toutes deux égales au nombre de personnes dans la famille I. Par exemple, les bornes de $\bullet \rightarrow$ A sont 3 $\rightarrow$ 3.
- Les arcs de la forme $j \rightarrow \bullet$, où j = 1, 2, 3, 4, 5.
  Il s'agit d'un arc spécifiant que le sommet j est un sommet récepteur. Puisqu'il faut respecter la capacité du radeau, la borne supérieure de cet arc est donnée par la capacité du radeau j. La borne inférieure d'un tel arc est ici logiquement nulle. Par exemple, les bornes de 1 $\rightarrow \bullet$ sont (0; 5).
- Les arcs de la forme $I \rightarrow j$, où I = A, B, ..., G et j = 1, 2, 3, 4, 5.
  Si le flot sur l'arc $I \rightarrow j$ est de x unités, alors x membres de la famille I prendront place dans le radeau j. Une borne supérieure de 2 est donc imposée sur un tel arc, de façon à favoriser l'intégration des familles.

Comme on demande seulement de vérifier s'il existe une solution admissible, la fonction-objectif utilisée n'a pas d'importance. Le solveur d'Excel indique que le modèle graphique possède effectivement au moins une solution admissible. On trouvera un exemple de telle solution dans le tableau donné ci-dessous en (b).

(b) Le réseau est analogue à celui utilisé en (a) : il contient les mêmes sommets, les mêmes arcs de type $\bullet \to I$ et $j \to \bullet$. Cependant, entre chaque sommet émetteur I associé à une famille et chaque sommet récepteur j associé à un radeau on trace deux arcs de bornes (0; 1), l'un de coût nul, l'autre de coût 2.

Au minimum, 2 familles verront 2 de leurs membres sur un même radeau. Le tableau suivant décrit une solution optimale, selon laquelle le radeau 3 contiendra 2 membres des familles C et E.

Nombre de personnes de la famille *I* dans le radeau *j*

	1	2	3	4	5	Total
A	–	1	1	1	–	3
B	–	1	1	1	1	4
C	1	1	2	1	–	5
D	1	–	1	1	–	3
E	1	1	2	1	1	6
F	1	1	1	1	–	4
G	1	1	1	1	1	5
Total	5	6	9	7	3	30

(c) Il s'agit de remplacer le sommet G par un sommet émetteur H de bornes (4; 4). Le tableau suivant décrit une solution optimale, selon laquelle le radeau 3 contiendra 2 membres de la famille C.

Nombre de personnes de la famille *I* dans le radeau *j*

	1	2	3	4	5	Total
A	–	1	1	1	–	3
B	1	1	1	1	–	4
C	1	1	1	1	1	5
D	1	–	1	1	–	3
E	1	1	2	1	1	6
F	1	1	1	1	–	4
G	–	1	1	1	1	4
Total	5	6	8	7	3	29

26. Les manches de bois de Cerbère.

On trouve ici un exemple classique de problème de transbordement : du matériel brut est acheté chez des fournisseurs, acheminé à des usines où il est traité et transformé en produit fini, lequel est finalement transporté chez des clients. Les sommets émetteurs, récepteurs et de transbordement sont évidents dans un tel cas.

- ***Sommets émetteurs :*** Le bois de frêne est acheté aux scieries S et T. On associe donc à ces dernières les sommets émetteurs S et T.

- ***Sommets récepteurs :*** Les grossistes constituent la destination finale des marchés et jouent le rôle des sommets récepteurs dans le modèle graphique. On crée les cinq sommets A, B, C, D et E.

- ***Sommets de transbordement :*** Le bois arrive aux quatre usines pour y être transformé en manches. Tout le bois qui arrive aux usines doit être traité et acheminé dans sa forme finale aux grossistes. Essentiellement donc, les usines jouent ici un rôle de transbordement. Toutefois, puisque la capacité de production des usines est limitée, les sommets qu'on leur associera sont dédoublés. En conclusion, on crée les sommets de transbordement U et U', V et V', W et W', X et X'. Les arcs de la forme $I \rightarrow I'$, où I = U, V, W, X, représentent de façon imagée l'intérieur des usines. Les coûts et les capacités de production des usines seront imputés à ces arcs.

- ***Flot :*** La nature du flot qui émane des sommets émetteurs est du bois de frêne, dont les quantités à acheter sont fournies en tonnes et dont le coût unitaire est donné en kilogrammes. Qui plus est, arrivé aux usines, ce bois se transforme en manches dont les quantités s'évaluent maintenant en unités et les coûts de production, en dollars par millier d'unités. La seule difficulté de ce problème réside dans le choix de l'unité du flot : du bois ou des manches ? Puisque les scieries «émettent» du bois dont le coût unitaire est donné en cents, on convient de prendre le kilogramme de bois comme unité de flot et d'exprimer en cents les coûts du modèle graphique.

Le modèle graphique de ce problème est donné à la page 41. Ajoutons quelques commentaires au sujet des différents types d'arcs qu'on y retrouve.

- Les arcs de la forme $\bullet \rightarrow I$, où I = S, T.

  Rappelons d'abord qu'une tonne métrique vaut 1000 kg. Les bornes inférieures sur ces arcs proviennent des ententes entre Cerbère et les scieries. Le coût unitaire d'achat du kilogramme de frêne est imputé sur ces arcs.

- Les arcs de la forme $I \rightarrow J$, où I = S, T et J = U, V, W, X.

  On reporte sur ces arcs les coûts unitaires de transport fournis dans l'énoncé.

- Les arcs de la forme $I \rightarrow I'$, où I = U, V, W, X.

  Il faut, par un choix approprié de bornes, prendre en considération les capacités et les coûts de production des usines. Considérons, à titre d'exemple, l'usine U et l'arc U $\rightarrow$ U'. Puisque l'unité de flot est le kilogramme de bois et que chaque kilogramme donne 2 manches, les capacités minimale et maximale de production de U sont de 3 000 et de

10 000 unités de flot respectivement. De plus, d'après l'énoncé, il en coûte à Cerbère 1000 $ pour fabriquer 1000 manches en U, soit 1 $ par manche, ou encore 2 $ par kg de bois transformé. De ce coût, il faut déduire les revenus provenant de la vente des copeaux, qui s'élèvent à 25% × 5 cents par kg de bois. Ainsi, le coût à reporter sur l'arc U → U' est 198,75 cents :

$$200 - (25\% \times 5) = 198{,}75.$$

Les données sur les autres arcs de ce type s'expliquent de façon similaire.

- Les arcs de la forme *I'* → *J*, où *I* = U, V, W, X et *J* = A, ..., E.

  On doit indiquer sur ces arcs les coûts de transport des usines aux grossistes. Ces coûts sont fournis dans le tableau ci-dessous : les coûts, qui sont donnés dans l'énoncé en dollars par millier de manches, ont été transformés en ¢/kg.

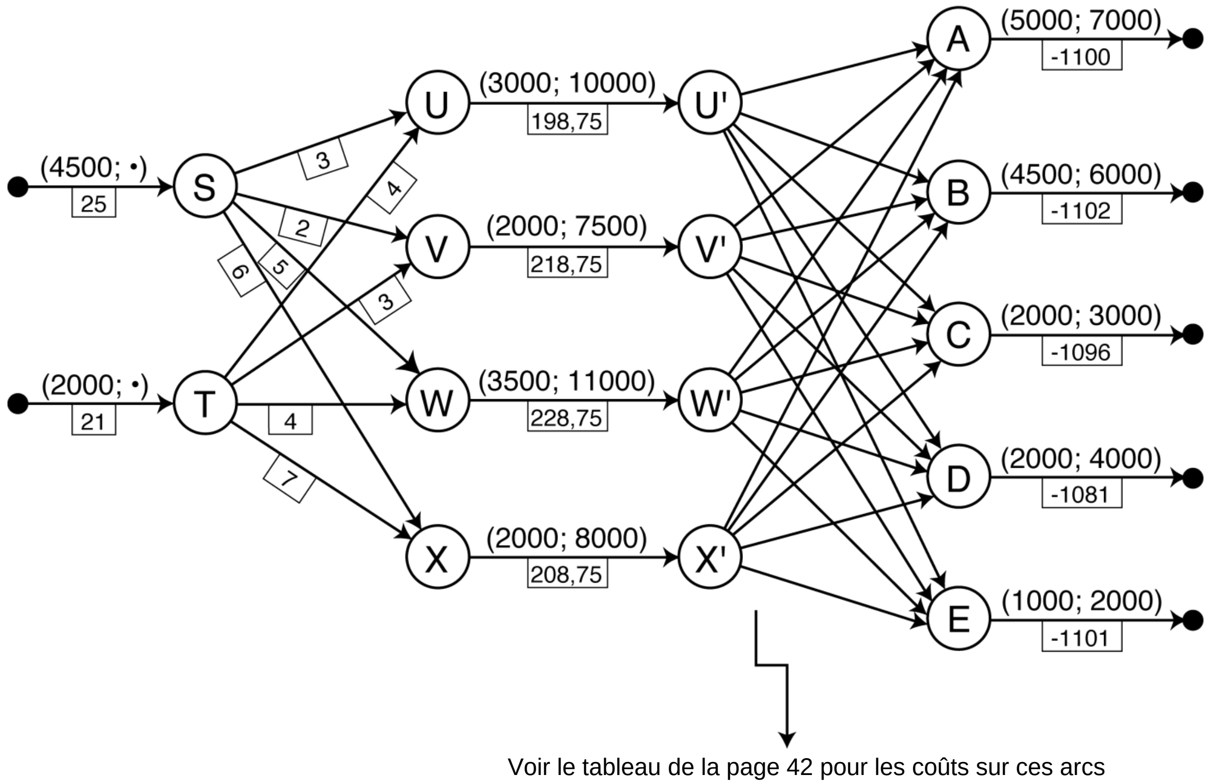
	A	B	C	D	E
U'	6,0	6,6	7,8	6,4	6,8
V'	6,2	6,4	7,6	7,8	6,6
W'	5,6	6,6	7,4	7,6	6,4
X'	6,4	6,0	6,4	6,2	6,4

- Les arcs de la forme *I* → •, où *I* = A, B, C, D, E.

  Il suffit de diviser par 2 les demandes minimales et maximales en manches des grossistes pour obtenir les bornes inférieures et supérieures sur ces arcs, qui sont exprimées comme partout dans le réseau en kilogrammes de bois. Les coûts sur ces arcs sont les prix de vente correspondants, traduits en ¢/kg, et affectés d'un signe négatif, car il s'agit de revenus.

Le gabarit pour les modèles de réseau a été utilisé pour résoudre ce modèle graphique. (Dans le chiffrier, les coût unitaires ont été multipliés par 100.)

MOG5-26 Les manches de bois de Cerbère



(a) Les usines sont approvisionnées à partir des scieries de la façon suivante.

Quantités de bois livrées aux usines à partir des scieries (en kg)

Scierie	Usine			
	U	V	W	X
S	–	2 000	–	2 500
T	10 000	–	3 500	4 000

(b) La production optimale des usines est la suivante.

Usine	U	V	W	X
Nombre de manches	20 000	4 000	7 000	13 000

(c) Le nombre optimal de manches acheminés de chaque usine vers chaque grossiste est indiqué dans le tableau suivant. Le profit total maximal de Cerbère s'élève à 188 264 $.

Acheminement des manches aux grossistes

Usine	Grossiste				
	A	B	C	D	E
U	7 000	5 000	–	8 000	–
V	–	–	–	–	4 000
W	7 000	–	–	–	–
X	–	7 000	6 000	–	–

27. Les ciments éburnéens.

La figure de la page suivante illustre un modèle graphique associé à ce problème. Quelques commentaires s'imposent concernant cette figure.

- ***Flot :*** Le ciment transporté ou entreposé constitue le flot qui circulera dans le réseau. L'unité de flot est la tonne de ciment et les coûts sont en cents par tonne.

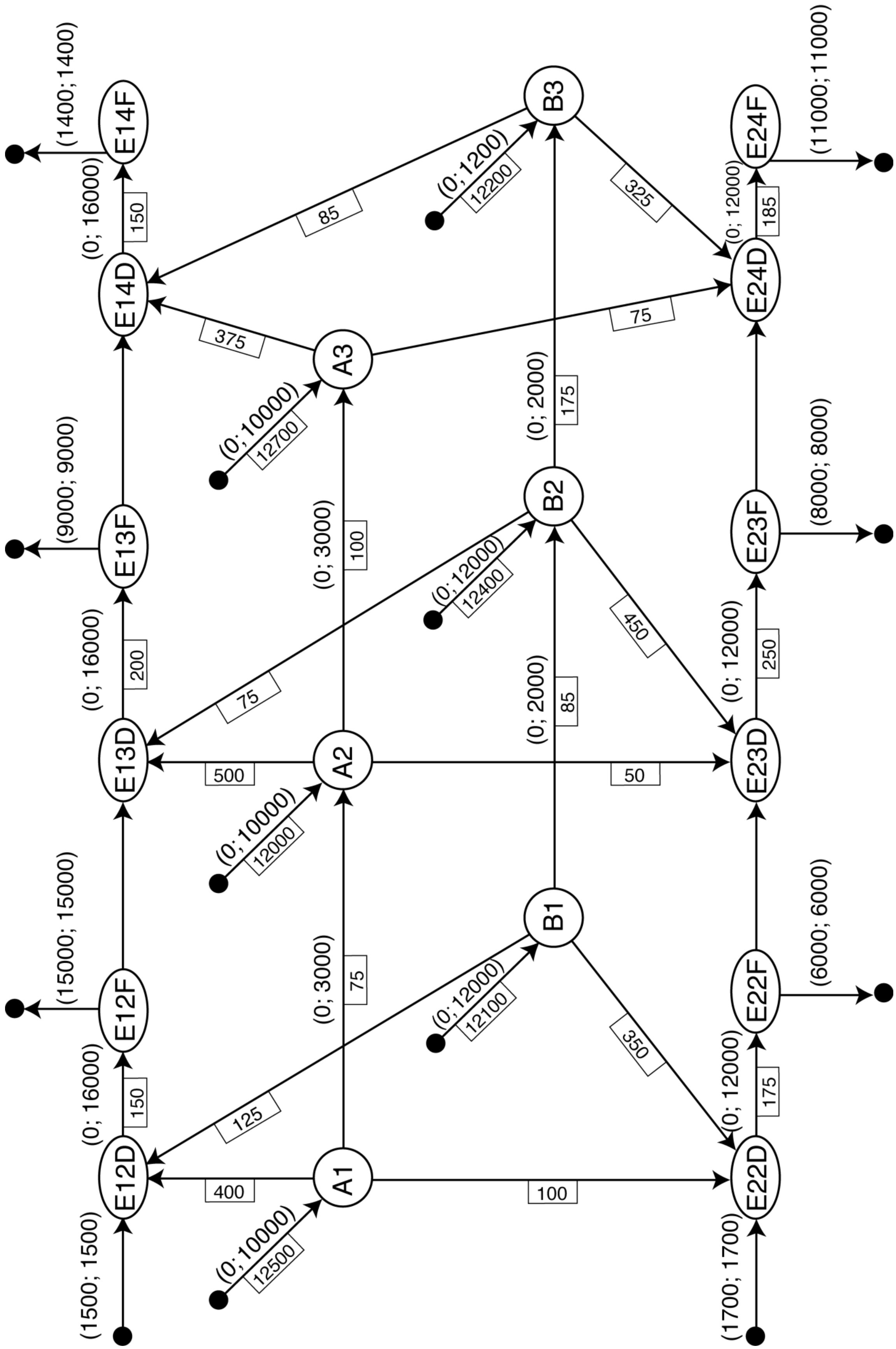
- ***Sommets émetteurs :*** Les six sommets de la forme *Ji*, où *J* = A, B et *i* = 1, 2, 3, constituent des sommets émetteurs : le flot net émergent de *Ji* représente la production de l'usine *J* durant le mois *i*. De plus, comme les entrepôts ne sont pas vides au début de la période de planification, les sommets E*k*2D, où *k* = 1, 2, émettront également du flot dans le réseau : dans ce cas, le flot net émergent représente le ciment entreposé à l'entrepôt *k* avant le début du mois 2.

- ***Sommets récepteurs :*** Comme la demande en ciment passe par les entrepôts, les sommets récepteurs sont les sommets E*ki*F, où *k* = 1, 2 et *i* = 2, 3, 4 : le flot net incident à E*ki*F représente le ciment livré aux clients à partir de l'entrepôt *k* à la fin du mois *i*.

Le coût total minimal s'élève à 7 521 800 $. Une solution optimale décrit ainsi la production de l'usine A pendant la période de planification considérée : durant le mois 1, l'usine A produira 6 800 tonnes, dont 1 500 seront expédiées à l'entrepôt 1, 4 300 seront expédiées à l'entrepôt 2 et 1 000 seront conservées à l'usine; la production du mois 2 s'élèvera à 10 000 tonnes, dont 8 000 seront livrées à E2 à la fin du mois; enfin, les 8 000 tonnes produites durant le mois 3 seront envoyées en E2, de même que les 3000 tonnes présentes à l'usine A au début de ce mois. La même solution optimale recommande d'expédier à l'entrepôt 1 toute la production de l'usine B, qui s'établira à 12 000, 11 000 et 12 000 tonnes respectivement pendant les mois 1, 2 et 3; cependant, 2 000 des 11 000 tonnes produites lors du mois 2 seront conservées à l'usine pendant un mois et livrées seulement au début du mois 4. Selon cette solution, tout le ciment disponible dans un entrepôt au début de l'un des trois mois sera livré aux clients avant la fin du mois afin de satisfaire à la demande.

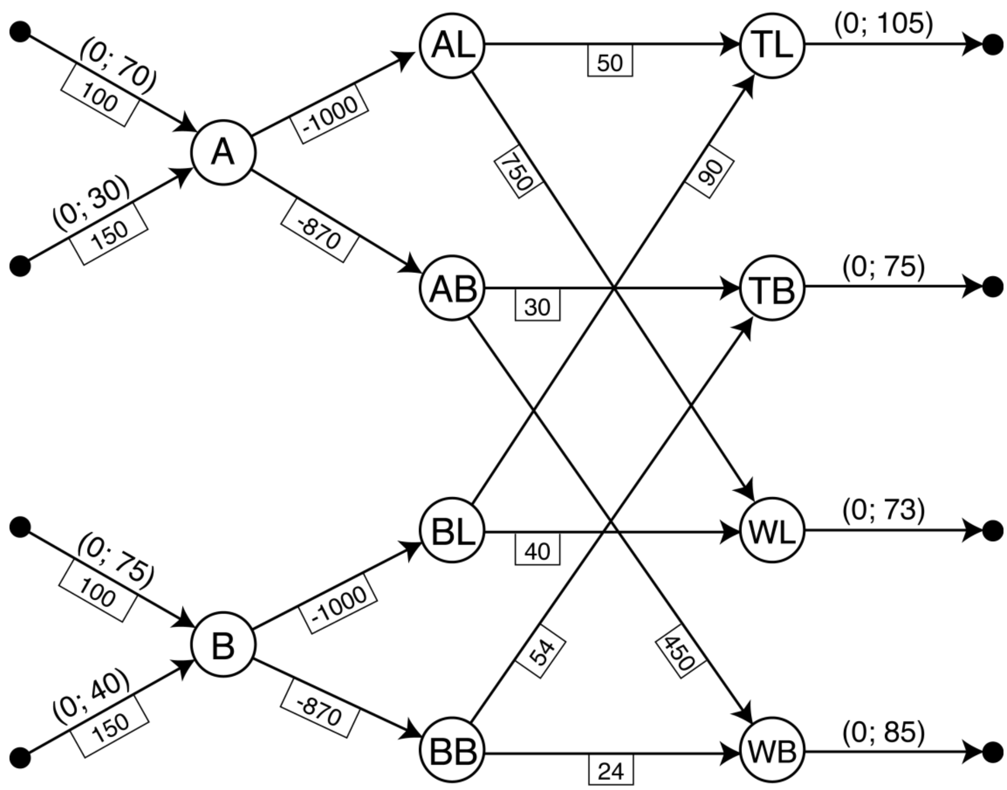
Note. On pourrait construire un modèle plus simple, mais moins facile à interpréter, où le sommet E*ki* associé au couple (Entrepôt *k*; Mois *i*) ne serait pas dédoublé. Dans ce modèle, les noeuds E12D et E12F ne font qu'un seul sommet, noté E12 : le coût de 1,50 $ de l'arc E12D → E12F est imputé à tous les arcs incidents à E12D; de plus, la borne de 16 kt sur cet arc signifie qu'au plus 1 kt restera à l'entrepôt 1 jusqu'au début du mois suivant. On adapte de même les autres arcs de la forme E*ki*D → E*ki*F…

MOG5-27 Les ciments éburnéens



28. La robinetterie NévéGlace.

(a) Les baignoires et les lavabos sont produits aux ateliers A et B, puis transportés aux clients T et W. On associe donc, en première analyse, les sommets émetteurs aux ateliers et les sommets récepteurs aux clients. Il faut déterminer ensuite la nature du flot qui circule dans le réseau. On peut choisir pour ce dernier un nombre de baignoires ou un nombre de lavabos. Toutefois, les données relatives aux coûts de production, de transport et aux prix de vente diffèrent pour ces deux produits. L'unité qui permettra ici de rendre homogène le flot est *l'heure de production*. En connaissant le nombre d'heures utilisées, on connaît le nombre de baignoires ou de lavabos fabriqués. Il faudra cependant savoir si ces heures sont consacrées à la production de baignoires ou de lavabos, les quantités produites en une heure différant d'un produit à l'autre. On devra donc séparer le flot en heures, émis par l'atelier A ou l'atelier B, en heures de production de lavabos ou en heures de production de baignoires. Une fois ces deux flots séparés, il ne faudra pas qu'ils soient réunis de nouveau. Le modèle graphique résultant est décrit ci-dessous.



Ajoutons quelques commentaires au sujet des arcs de ce modèle.

- Les arcs de la forme $\bullet \to I$, où I = A, B.
  Ces arcs définissent les données relatives aux sommets émetteurs. On retrouve deux arcs de la forme • → A et deux arcs de la forme • → B : ceux de coût unitaire égal à 100 $ (resp. à 150 $) correspondent aux heures régulières (resp. aux heures supplémentaires). Les disponibilités en A ou en B déterminent les bornes supérieures sur ces arcs.

- Les arcs $I \to I$L et $I \to I$B, où I = A, B.
  Le flot émis par A est séparé en heures servant à la production de lavabos, qui circulent sur l'arc A → AL, et en heures consacrées aux baignoires, transmises par l'arc A → AB. Puisque, en une heure, trois baignoires sont produites, ce qui rapporte $3 \times 290 = 870$ dollars, un coût de -870 est reporté sur l'arc A → AB, le signe «moins» indiquant qu'il s'agit d'un revenu. De même, en une heure, cinq lavabos sont produits et un coût de -1000 est associé à l'arc A → AL. Les données sur les arcs B → BB et B → BL s'expliquent de façon similaire.

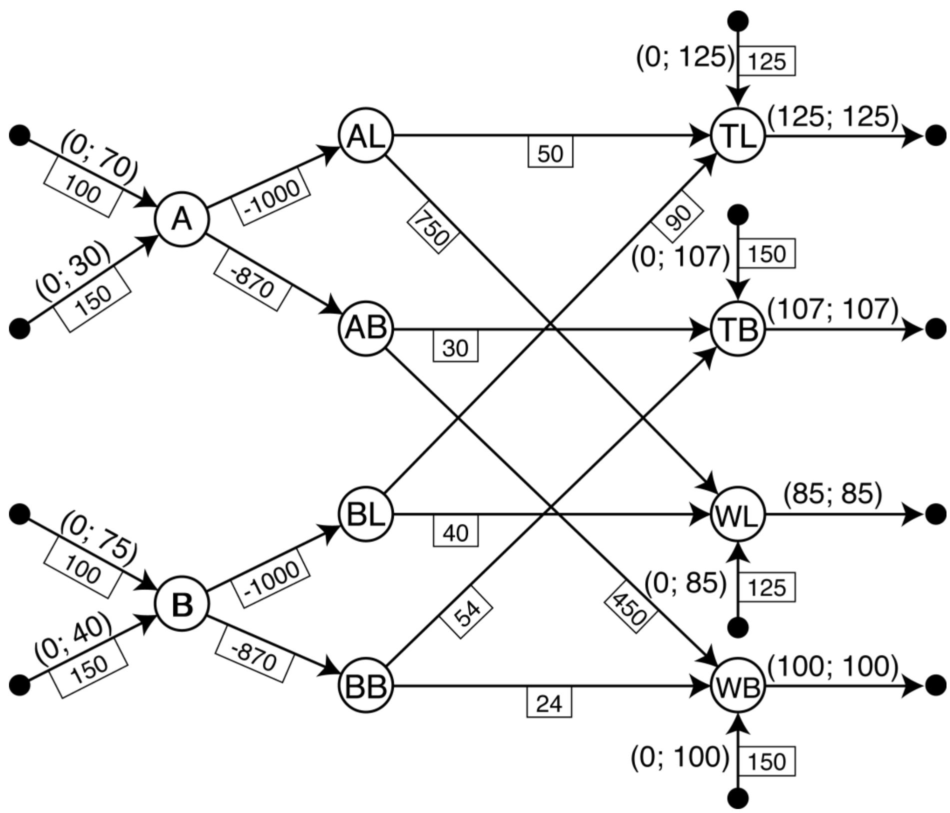
- Les arcs de la forme $IJ \to KJ$, où I = A, B et J = L, B et K = T, W.
  Il s'agit des arcs de transport des lavabos ou des baignoires à leurs destinations finales. Considérons, à titre d'exemple, l'arc AL → TL. Chaque unité de flot qui y circule correspond à une heure de production dévolue à la fabrication de cinq lavabos destinés à remplir une partie de la commande du client T. NévéGlace subit donc, pour cette unité de flot, un coût de transport égal à $5 \times 10 = 50$ dollars, ce qui est le coût unitaire de l'arc AL → TL. Les coûts imputés aux autres arcs de ce type s'expliquent de façon analogue.

- Les arcs de la forme $KJ \to$ •, où K = T, W et J = L, B.
  Ces arcs définissent les données relatives aux sommets récepteurs. En pratique, il n'y a que deux destinations finales, les clients T et W. Toutefois, dans le modèle graphique, de façon à prendre en considération les demandes maximales en baignoires et en lavabos, il faut créer quatre sommets récepteurs et quatre arcs dont les bornes supérieures correspondent aux heures de production nécessaires à la fabrication de ces nombres maximaux de produits : par exemple, il faut 255/3 = 85 heures pour produire 255 baignoires, ce qui conduit à une borne supérieure de 85 sur l'arc WB → •.

Le revenu net maximal de NévéGlace s'élève à 175 932 \$. Le tableau suivant résume, en termes du contexte, le flot sur les différents arcs dans une solution optimale de ce modèle graphique.

de l'atelier	Nombre de baignoires expédiées		Nombre de baignoires expédiées	
	à T	à W	à T	à W
A	–	–	500	–
B	–	111	25	365

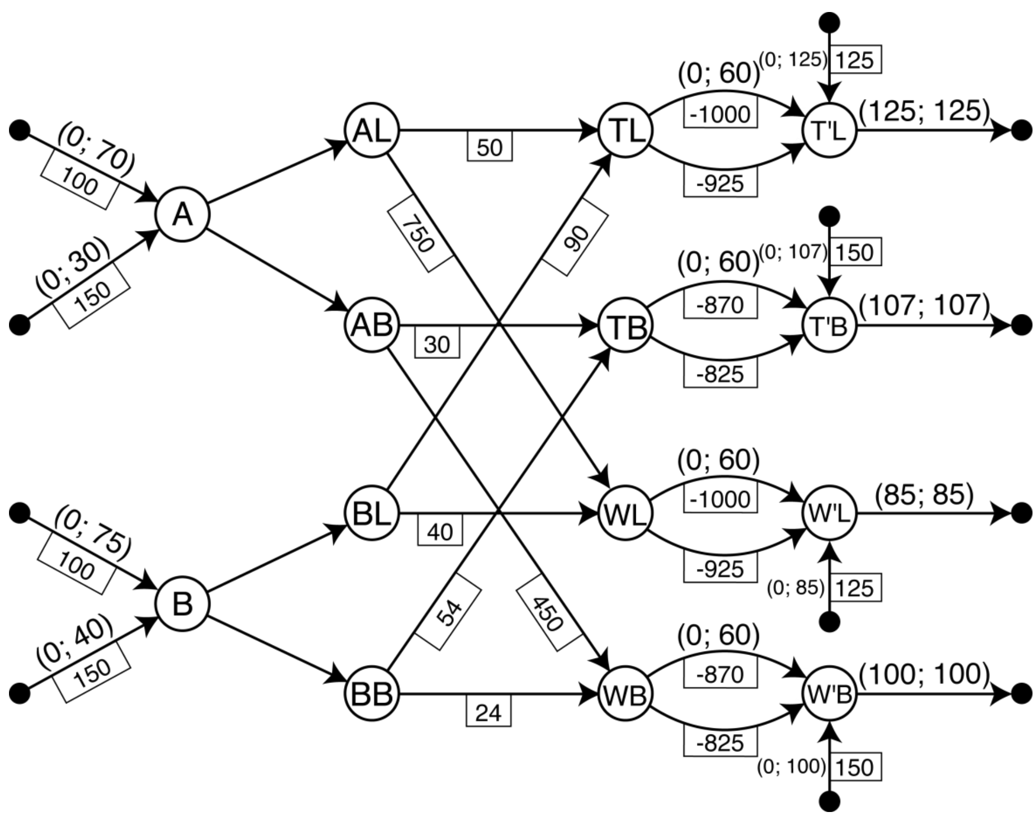
(b) Les nouvelles données concernent les demandes des clients T et W. En particulier, NévéGlace doit maintenant satisfaire à des demandes minimales de ses clients. De façon à prendre en considération ces nouvelles demandes, on change dans un premier temps les bornes inférieures et supérieures associées aux quatre arcs définissant les sommets récepteurs. On se rend alors compte que les heures totales disponibles aux ateliers ne suffisent pas à combler les demandes minimales des clients, de sorte que le problème de transbordement associé ne possède aucune solution admissible. Imaginons que chaque sommet récepteur puisse recevoir, d'une source fictive, les heures manquantes, et cela en quantité aussi grande que nécessaire. Les demandes minimales en baignoires et en lavabos pourront ainsi toujours être satisfaites. Le modèle graphique associé au problème modifié (voir la figure ci-dessous) s'obtient donc de celui de la question (a) non seulement en changeant les bornes sur les arcs virtuels définissant les sommets récepteurs, mais également en ajoutant des arcs du type $\bullet \rightarrow KJ$, où K = T, W et J = L, B. Ces arcs servent à amener des heures fictives aux sommets récepteurs. Considérons, à titre d'exemple, l'arc $\bullet \rightarrow$ TL : chaque heure qui circule sur cet arc s'interprète comme l'arrivée au client T de cinq lavabos fictifs, donc, en réalité, comme le fait de ne pas satisfaire la demande minimale en lavabos de T par cinq unités; par conséquent, il faut payer à T un dédit de $5 \times 25 = 125$ dollars, ce qui constitue le coût de l'arc $\bullet \rightarrow$ TL. Les coûts sur les autres arcs du même type s'expliquent de façon analogue.



Le revenu net maximal de NévéGlace s'élève maintenant à 148 280 $. Le tableau suivant résume une solution optimale en termes du contexte. Le client T ne reçoit aucune baignoire tandis que, sur les 300 baignoires demandées minimalement, W en reçoit seulement 15. Cependant, les demandes minimales en lavabos de T et de W sont respectées.

de l'atelier	Nombre de baignoires expédiées		Nombre de baignoires expédiées	
	à T	à W	à T	à W
A	–	–	500	–
B	–	15	125	425

(c) Expliquons quels changements apporter à la figure de la question (b) pour tenir compte des nouvelles données. Considérons, à titre d'exemple, le cas des lavabos vendus à T. Les 300 premiers ne sont pas vendus au même prix que les suivants : il faut donc distinguer dans le flot les premières unités des suivantes. On y arrive en dédoublant le sommet TL en deux sommets, TL et T'L, et en créant deux arcs entre eux. Par le premier transiteront les heures destinées à la fabrication des 300 premiers lavabos vendus à T; puisqu'une heure donne cinq lavabos, au maximum 60 heures doivent circuler sur cet arc; de plus, un coût de -1000 est reporté sur cet arc, car les premiers lavabos rapportent 200 \$ chacun et une heure passant par cet arc rapporte un revenu de $5 \times 200 = 1000$ dollars. Le second arc entre TL et T'L doit recevoir les heures en sus des 60 premières et on lui impute un coût de $-185 \times 5 = -925$. La figure ci-dessous illustre le réseau résultant. Il est important de comprendre que le flot passera en premier sur l'arc de coût -1000 jusqu'à un maximum de 60 unités, «avant» de passer sur le second arc qui est moins intéressant. Si les dernières unités vendues étaient plus profitables que les premières, ce modèle graphique ne serait pas valide. Les données sur les arcs de la forme TB $\rightarrow$ T'B, WL $\rightarrow$ W'L et WB $\rightarrow$ W'B s'expliquent de façon analogue.



Cette fois, le revenu maximal net de NévéGlace est de 142 430 \$. Le tableau suivant résume une solution optimale en termes du contexte.

de l'atelier	Nombre de baignoires expédiées		Nombre de baignoires expédiées	
	à T	à W	à T	à W
A	–	–	500	–
B	–	90	–	425

29. La briqueterie de Pierre Ratsimandrana.

La figure de la page suivante illustre un réseau associé à ce problème. Les éléments de ce modèle graphique sont :

- ***Flot :*** L'unité de flot est le lot de 50 000 briques. Les coûts et revenus sont exprimés en milliers de francs malgaches.
- ***Sommets :*** À chacun des 4 mois de la période sèche sont associés trois sommets, le premier (D*i*) correspondant au début du mois, les deux autres (F*i* et P*i*), à la fin du mois.
- ***Sommets émetteurs :*** Les arcs virtuels ● → D*i* traduisent la réception des briques vertes provenant de la coopérative. Par les arcs ● → F1 et ● → P1 entrent dans le réseau les 3 lots de briques cuites non polies et les 2 lots de briques polies dont Pierre dispose au début du mois 1.
- ***Sommets récepteurs :*** Les arcs virtuels «horizontaux» F*i* →● et P*i* →● traduisent la vente des lots de briques cuites non polies (F*i*) et polies (P*i*). Les arcs «verticaux» F4→● et P4→● forcent la constitution en fin de saison d'un stock pour la prochaine année.
- ***Arcs du réseau :*** Les arcs de la forme D*i* → F*i* représentent la cuisson des lots; ceux de la forme F*i* → P*i*, le polissage des briques. Les arcs «verticaux» entre un sommet, F*i* ou P*i*, et le sommet analogue associé au mois subséquent correspondent à l'entreposage de lots de briques cuites non polies et polies.

Le revenu net maximal de Pierre est de 90 250 milliers de francs malgaches. Le tableau suivant décrit une solution optimale (les lignes 4 et 5, dont les sommets terminaux sont notés F*i*+ et P*i*+, donnent les valeurs du flot transitant par les arcs verticaux représentant l'entreposage d'un mois *i* au mois subséquent *i*+1). On note que cette solution recommande de produire suffisamment pour répondre à la demande maximale, de cuire le maximum de 15 lots par mois, sauf le mois 1 où seulement 10 lots seraient traités.

Arc	M1	M2	M3	M4
● → D*i*	10	15	15	15
D*i* → F*i*	10	15	15	15
F*i* → P*i*	4	4	0	0
F*i* → F*i*+	0	0	5	–
P*i* → P*i*+	4	6	5	–
F*i* → ●	9	11	10	14
P*i* → ●	2	2	1	1

Note. On pourrait, pour alléger le réseau, remplacer la séquence ● → D*i* → F*i* par un arc virtuel unique ● → F*i* dont les bornes seraient celles de D*i* → F*i* et dont le coût unitaire serait la somme des coûts unitaires des deux arcs. Par exemple, le coût reporté sur l'arc ● → D1 serait 2750 + 2000 = 4750. Nous avons préféré indiquer explicitement dans le modèle graphique que l'émission de lots de briques cuites se compose de deux étapes, soit la réception de briques vertes, puis la cuisson de ces dernières.

MOG5-29 La briqueterie de Pierre Ratsimandrana