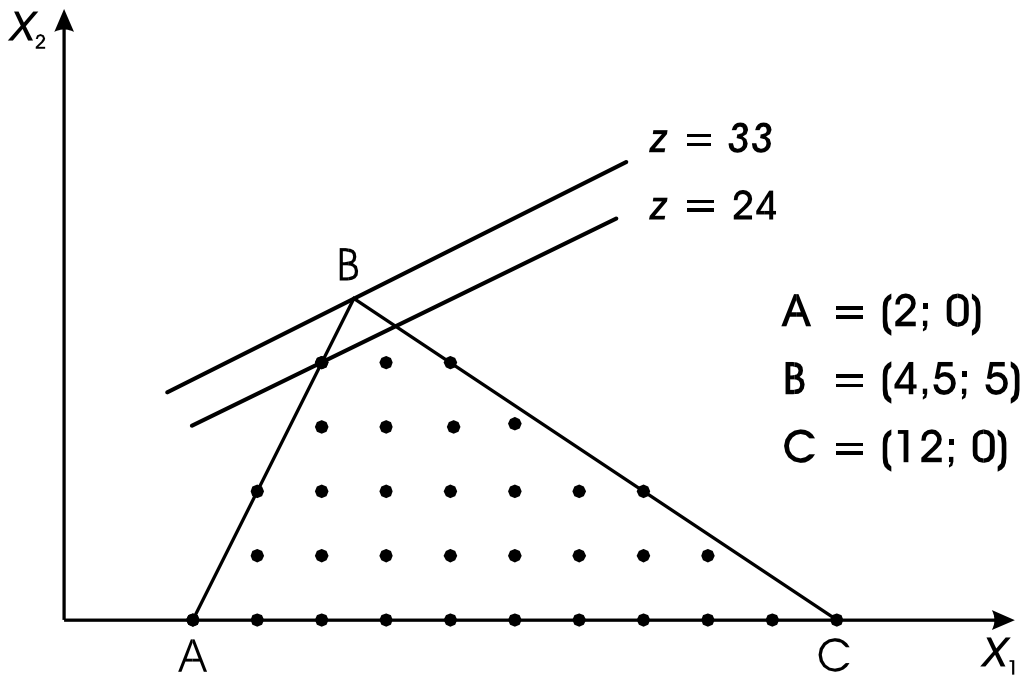


Chapitre 4 – Solutions des problèmes

1. Résolution d'un modèle PLTE à deux variables.

(a) La région admissible de la relaxation continue (P_0) est le polygone ABC représenté à la figure ci-dessous. La solution optimale de (P_0) correspond au sommet $B = (4,5; 5)$; en ce point, z atteint sa valeur maximale $z_0 = 33$.



(b) La solution optimale de (P) est le point $x^* = (4; 4)$. La valeur maximale du modèle (P) en nombres entiers est $z^* = 24$.

(c) La figure de la page suivante décrit les séparations successives lorsque le modèle (P) est résolu à l'aide de la méthode SÉP. Elle donne également l'arbre d'énumération résultant de ces séparations. La première séparation correspond à enlever la bande

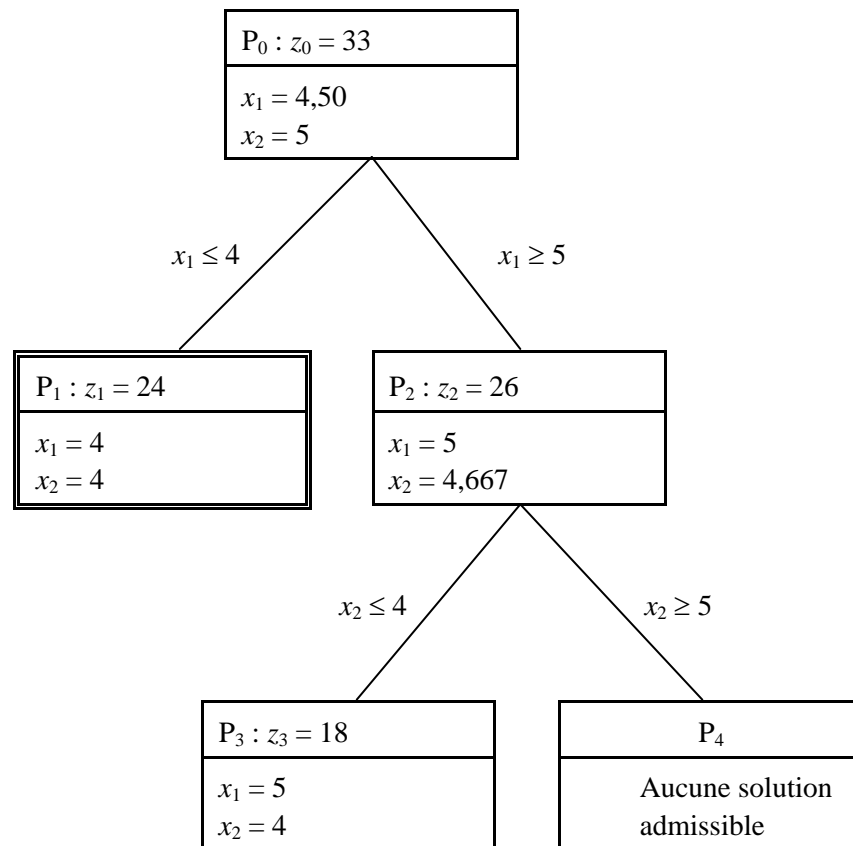
$$4 < x_1 < 5 \text{ et } x_2 \geq 0;$$

la seconde, à enlever la bande

$$4 < x_2 < 5 \text{ et } x_1 \geq 5.$$

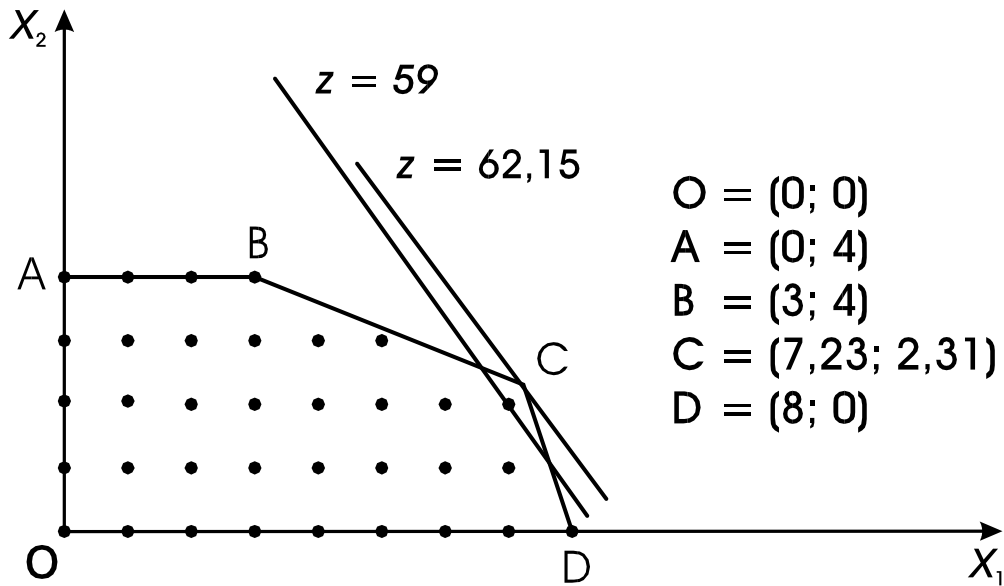
4-01. Résolution d'un modèle PLTE à deux variables - Séquence des séparations et arbre d'énumération

Séparation		Valeurs optimales	Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
Nœud	Contraintes				
		$z_0 = 33$		$z^* \leq 33$	P_0
P_0	$x_1 \leq 4$ $x_1 \geq 5$	$z_1 = 24$ $z_2 = 26$	x_1^* adm	$24 \leq z^* \leq 26$	P_2
P_2	$x_2 \leq 4$ $x_2 \geq 5$	$z_3 = 18$	x_3^* adm $Adm = \emptyset$	$z^* = 24$	Aucun



2. Modèle à deux variables et critères de choix de la variable de séparation.

(a) La région admissible de la relaxation continue (P_0) est le polygone OABCD représenté à la figure ci-dessous. La solution optimale de (P_0) correspond au sommet $C = (7,23; 2,31)$; en ce point, z atteint sa valeur maximale $z_0 = 62,15$.



(b) La solution optimale de (P) est le point $x^* = (7; 2)$. La valeur maximale du modèle (P) en nombres entiers est $z^* = 59$.

(c) Le tableau ci-dessous décrit les séparations successives lorsque le modèle (P) est résolu par la méthode SÉP selon le critère du meilleur c_j . La première séparation correspond à enlever la bande

$$7 < x_1 < 8 \text{ et } x_2 \geq 0;$$

la seconde, à enlever la bande

$$2 < x_2 < 3 \text{ et } 0 \leq x_1 \leq 7.$$

Séparation	Solution optimale			Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente	
	Nœud	Contraintes	x_2				x_3
			7,23	2,31	$z_0 = 62,15$	$z^* \leq 62,15$	P_0
P_0	$x_1 \leq 7$		7	2,4	$z_1 = 61$	$56 \leq z^* \leq 61$	P_1
	$x_1 \geq 8$		8	0	$z_2 = 56$		
P_1	$x_2 \leq 2$		7	2	$z_3 = 59$	$z^* = 59$	Aucun
	$x_2 \geq 3$		5,5	3	$z_4 = 53,5$		

(d) Le tableau suivant décrit les séparations successives lorsque le critère de la variable la plus distante est utilisé. La première séparation correspond à enlever la bande

$$2 < x_2 < 3 \text{ et } x_1 \geq 0;$$

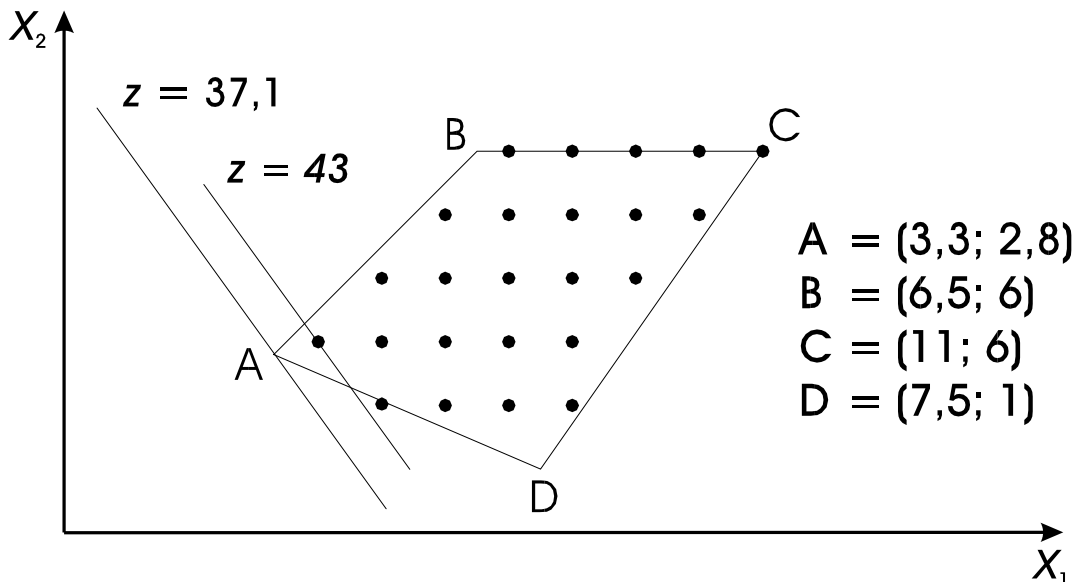
la seconde, à enlever la bande

$$7 < x_1 < 8 \text{ et } 0 \leq x_2 \leq 2.$$

Séparation		Solution optimale			Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
Nœud	Contraintes	x_2	x_3	z			
		7,23	2,31	$z_0 = 62,15$		$z^* \leq 62,15$	P_0
P_0	$x_2 \leq 2$	7,33	2	$z_1 = 61,33$		$z^* \leq 61,33$	$P_1 P_2$
	$x_2 \geq 3$	5,50	3	$z_2 = 53,50$			
P_1	$x_1 \leq 7$	7	2	$z_3 = 59$	x_3^* adm	$z^* = 59$	Aucun
	$x_1 \geq 8$	8	0	$z_4 = 56$	x_4^* adm		

3. Résolution d'un modèle PLTE de minimisation comportant deux variables.

(a) La région admissible de la relaxation continue (P_0) est le polygone ABCD représenté à la figure ci-dessous. La solution optimale de (P_0) correspond au sommet A = (3,3; 2,8); en ce point, z atteint sa valeur minimale $z_0 = 37,1$.



(b) La solution optimale de (P) est le point $x^* = (4; 3)$. La valeur minimale du modèle (P) en nombres entiers est $z^* = 43$.

(c) Le tableau ci-dessous décrit les séparations successives lorsque le modèle (P) est résolu par la méthode SÉP selon le critère du meilleur c_j . La première séparation correspond à enlever la bande

$$2 < x_2 < 3 \text{ et } x_1 \geq 0;$$

la seconde, à enlever la bande

$$3 < x_1 < 4 \text{ et } x_2 \geq 3.$$

Séparation		Solution optimale			Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
Nœud	Contraintes	x_1	x_2	z			
		3,3	2,8	$z_0 = 37,1$		$37,1 \leq z^*$	P_0
P_0	$x_2 \leq 2$	5,167	2	$z_1 = 46,167$		$39,5 \leq z^*$	$P_1 P_2$
	$x_2 \geq 3$	3,5	3	$z_2 = 39,5$			
P_2	$x_1 \leq 3$				$Adm = \emptyset$	$z^* = 43$	Aucun
	$x_1 \geq 4$	4	3	$z_4 = 43$	x_4^* adm		

(d) Le tableau ci-dessous décrit les séparations successives lorsque le modèle (P) est résolu par la méthode SÉP selon le critère de la variable la plus distante. La première séparation correspond à enlever la bande

$$3 < x_1 < 4 \text{ et } x_2 \geq 0;$$

la seconde, à enlever la bande

$$2 < x_2 < 3 \text{ et } x_1 \geq 4.$$

Séparation		Solution optimale			Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
Nœud	Contraintes	x_1	x_2	z			
		3,3	2,8	$z_0 = 37,1$		$37,1 \leq z^*$	P_0
P_0	$x_1 \leq 3$				$Adm = \emptyset$	$40,5 \leq z^*$	P_2
	$x_1 \geq 4$	4	2,5	$z_2 = 40,5$			
P_2	$x_2 \leq 2$	5,167	2	$z_3 = 46,167$	$z_3 \geq z_4$	$z^* = 43$	Aucun
	$x_2 \geq 3$	4	3	$z_4 = 43$	x_4^* adm		

4. La solution arrondie et la solution optimale.

(a) La solution optimale de la relaxation continue (P_0) est :

$$x_1 = 5,4545 \qquad x_2 = 9,4545 \qquad z_0 = 4\,120.$$

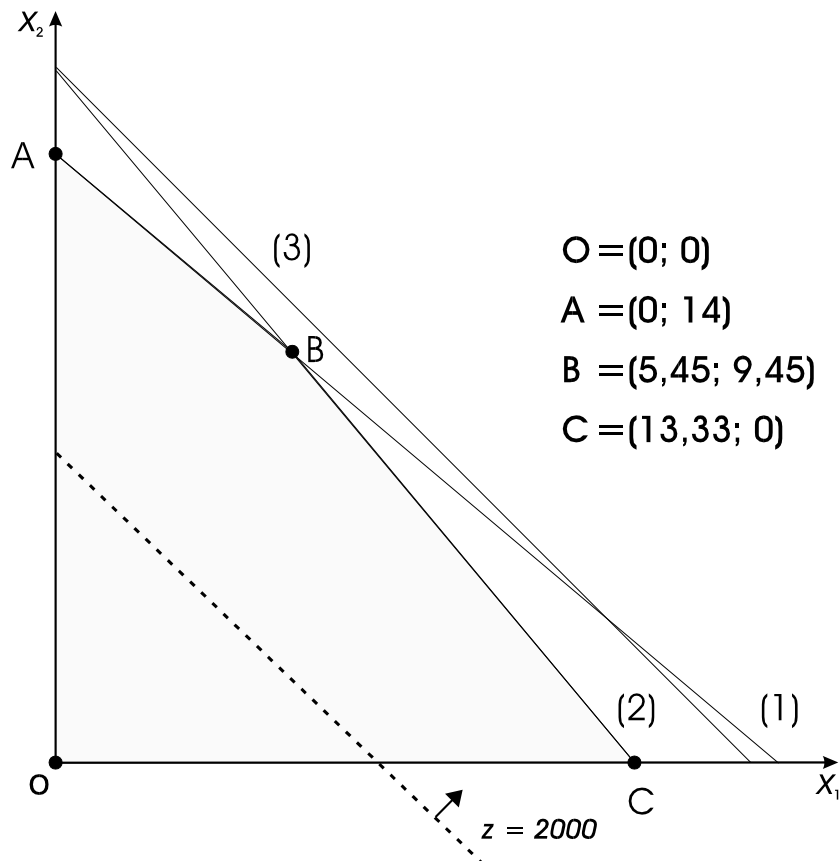
(b) Ici, toutes les contraintes technologiques sont du type \leq et les coefficients en sont non négatifs. Il suffit donc d'arrondir par le bas. La solution arrondie suivante est solution admissible de (P) :

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = 9 \qquad z = 3\,870.$$

(c) Le tableau de la page suivante donne la séquence des séparations lorsque le modèle est résolu à l'aide de la méthode SÉP. La solution optimale du modèle (P) est :

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 14 \qquad z^* = 3\,920.$$

(d) La figure ci-dessous donne la région admissible de la relaxation (P_0). La solution optimale de (P_0) est le sommet B de cette région, tandis que la solution optimale du modèle (P) correspond au point A. On constate que ces points sont éloignés l'un de l'autre. Cela est dû au quasi-parallélisme entre les courbes de niveaux de z et le segment [A; B], lequel segment fait partie de la frontière de la région admissible.



4-04. La solution arrondie et la solution optimale – Séquence des séparations

Séparation		P _h	z _h	x ₁	x ₂	Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
Noeud	Contraintes							
		P ₀	4 120	5,45	9,45		$z^* \leq 4\ 120$	P ₀
P ₀	$x_2 \leq 9$	P ₁	4 095	5,83	9		$z^* \leq 4\ 096$	P ₁ P ₂
	$x_2 \geq 10$	P ₂	4 096	4,8	10			
P ₂	$x_1 \leq 4$	P ₃	4 066,7	4	10,67	Adm = ∅	$z^* \leq 4\ 095$	P ₁ P ₃
	$x_1 \geq 5$	P ₄						
P ₁	$x_1 \leq 5$	P ₅	3 870	5	9	x ₅ [*] adm	$3\ 870 \leq z^* \leq 4\ 084$	P ₃ P ₆
	$x_1 \geq 6$	P ₆	4 084	6	8,8			
P ₆	$x_2 \leq 8$	P ₇	4 040	6,67	8	Adm = ∅	$3\ 870 \leq z^* \leq 4\ 066,7$	P ₃ P ₇
	$x_2 \geq 9$	P ₈						
P ₃	$x_2 \leq 10$	P ₉	3 880	4	10	x ₉ [*] adm	$3\ 880 \leq z^* \leq 4\ 052$	P ₇ P ₁₀
	$x_2 \geq 11$	P ₁₀	4 052	3,6	11			
P ₁₀	$x_1 \leq 3$	P ₁₁	4 030	3	11,5	Adm = ∅	$3\ 880 \leq z^* \leq 4\ 040$	P ₇ P ₁₁
	$x_1 \geq 4$	P ₁₂						
P ₇	$x_1 \leq 6$	P ₁₃	3 860	6	8	z ₁₃ ≤ z ₉	$3\ 880 \leq z^* \leq 4\ 030$	P ₁₁ P ₁₄
	$x_1 \geq 7$	P ₁₄	4 018	7	7,6			
P ₁₁	$x_2 \leq 11$	P ₁₅	3 890	3	11	x ₁₅ [*] adm	$3\ 890 \leq z^* \leq 4\ 018$	P ₁₄ P ₁₆
	$x_2 \geq 12$	P ₁₆	4 008	2,4	12			
P ₁₄	$x_2 \leq 7$	P ₁₇	3 985	7,5	7	Adm = ∅	$3\ 890 \leq z^* \leq 4\ 008$	P ₁₆ P ₁₇
	$x_2 \geq 8$	P ₁₈						
P ₁₆	$x_1 \leq 2$	P ₁₉	3 993,3	12	12,33	Adm = ∅	$3\ 890 \leq z^* \leq 3\ 993,3$	P ₁₇ P ₁₉
	$x_1 \geq 3$	P ₂₀						
P ₁₉	$x_2 \leq 12$	P ₂₁	3 900	2	12	x ₂₁ [*] adm	$3\ 900 \leq z^* \leq 3\ 985$	P ₁₇ P ₂₂
	$x_2 \geq 13$	P ₂₂	3 964	1,2	13			
P ₁₇	$x_1 \leq 7$	P ₂₃	3 850	7	7	z ₂₃ ≤ z ₂₁	$3\ 900 \leq z^* \leq 3\ 964$	P ₂₂ P ₂₄
	$x_1 \geq 8$	P ₂₄	3 952	8	6,4			
P ₂₂	$x_1 \leq 1$	P ₂₅	3 956,7	1	13,167	Adm = ∅	$3\ 900 \leq z^* \leq 3\ 956,7$	P ₂₄ P ₂₅
	$x_1 \geq 2$	P ₂₆						
P ₂₅	$x_2 \leq 13$	P ₂₇	3 910	1	13	z ₂₇ ≤ z ₂₈	$3\ 920 \leq z^* \leq 3\ 952$	P ₂₄
	$x_2 \geq 14$	P ₂₈	3 920	0	14			
P ₂₄	$x_2 \leq 6$	P ₂₉	3 930	8,33	6	Adm = ∅	$3\ 920 \leq z^* \leq 3\ 930$	P ₂₉
	$x_2 \geq 7$	P ₃₀						
P ₂₉	$x_1 \leq 8$	P ₃₁	3 840	8	6	z ₃₁ ≤ z ₂₈	$z^* = 3\ 920$	Aucun
	$x_1 \geq 9$	P ₃₂	3 886	9	5,2			

5. L'impact des contraintes d'intégrité sur la solution optimale

La séquence des séparations ainsi que l'arbre d'énumération sont donnés à la page suivante. La solution optimale de (P) est :

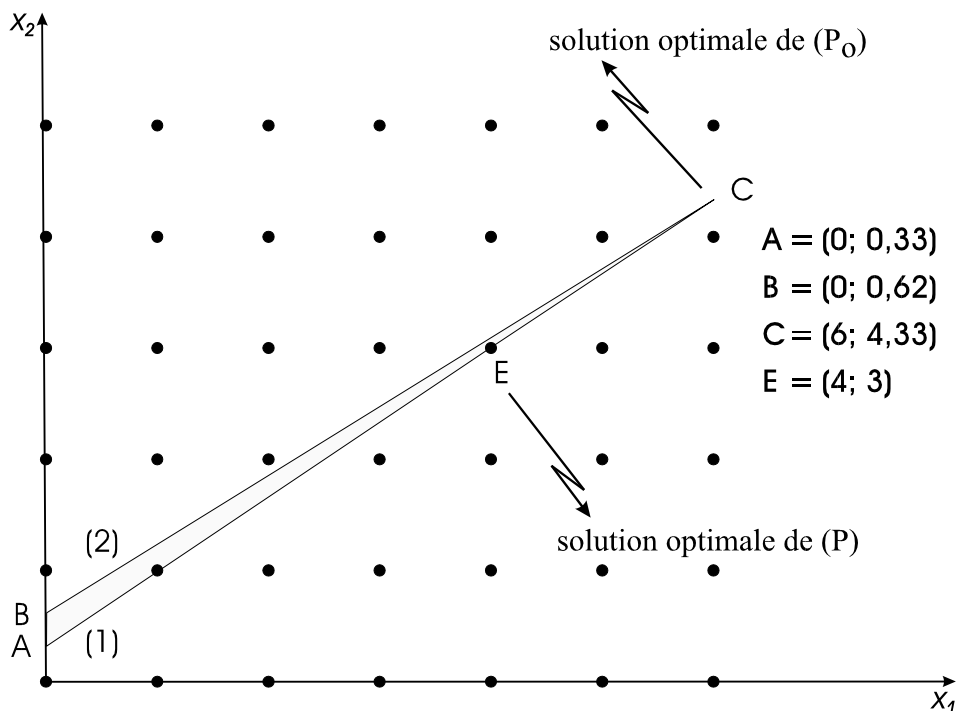
$$x_1 = 4 \qquad x_2 = 3 \qquad z^* = 14.$$

tandis que celle de (P₀) est :

$$x_1 = 6 \qquad x_2 = 4,33 \qquad z_0 = 20,67.$$

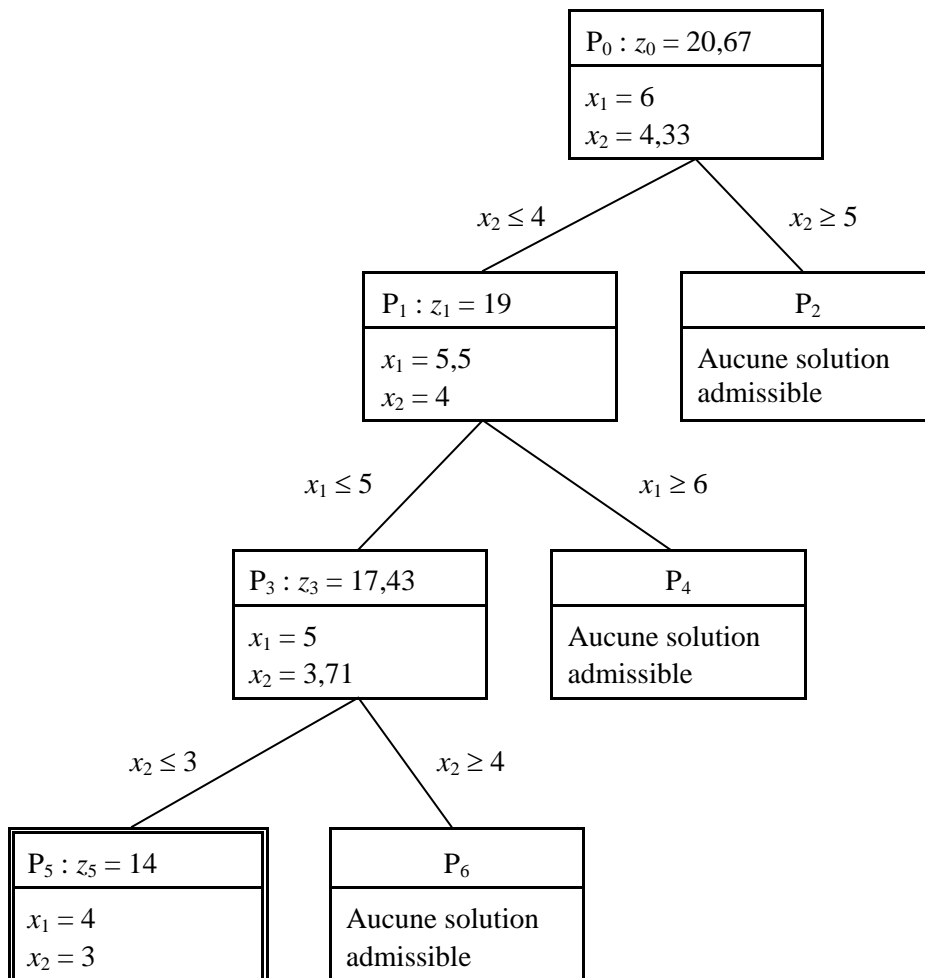
La relaxation (P₀) admet comme région admissible le triangle ABC de la figure ci-dessous et son optimum correspond au sommet C = (6; 13/3) à l'extrémité droite du triangle. Ce sommet C ne satisfait pas à la contrainte d'intégrité imposée à x_2 ; et, comme l'indique le graphique, c'est à gauche de C qu'il faut rechercher l'optimum de (P). Les premiers candidats à considérer sont les points tels que $x_1 = 5$; mais on observe que, dans le triangle ABC, tous les points de la forme (5; x_2) ont une 2^e coordonnée non entière. Enfin, lorsque $x_1 = 4$, il est possible de trouver une solution admissible dont la 2^e coordonnée est entière : il s'agit du point E = (4; 3), qui est l'optimum de (P).

C'est l'étroitesse de la région admissible ABC qui explique l'obligation de s'éloigner ainsi de C pour obtenir l'optimum E de (P). En effet, on a considéré l'intersection du triangle ABC et de la droite verticale « $x_1 = c$ », où l'on a posé successivement $c = 5$, puis $c = 4$. Cette intersection est un court segment vertical dont la longueur est bien inférieure à 1 et qui contient au plus un point dont la 2^e coordonnée est entière. Dans l'exemple numérique traité ici, on a trouvé une solution admissible dès le 2^e essai, celui où $c = 4$. Dans des cas similaires, un seul essai pourrait suffire; dans d'autres, plus de deux essais pourraient être nécessaires; il pourrait même arriver, comme dans l'exemple (P3) de la section 4.2.5, que le modèle (P) n'admette aucune solution admissible.



4-05. L'impact des contraintes d'intégrité sur la solution optimale – Séparations et arbre

Séparation		Valeurs optimales	Nœuds éliminés	$z \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
Nœud	Contraintes				
		$z_0 = 20,67$		$z^* \leq 20,67$	P_0
P_0	$x_2 \leq 4$ $x_2 \geq 5$	$z_1 = 19$	$Adm = \emptyset$	$z^* \leq 19$	P_1
P_1	$x_1 \leq 5$ $x_1 \geq 6$	$z_3 = 17,43$	$Adm = \emptyset$	$z^* \leq 17,43$	P_3
P_3	$x_2 \leq 3$ $x_2 \geq 4$	$z_5 = 14$	x_5^* adm $Adm = \emptyset$	$z^* = 14$	Aucun



6. Le critère du meilleur c_j et les problèmes de maximisation.

(a) Noter que les variables n'apparaissant pas explicitement dans les colonnes sous « Solution optimale » prennent la valeur 0 dans toutes les solutions optimales x : par exemple, la variable x_4 est nulle dans les solutions optimales des nœuds (P_0), (P_1) et (P_2). La solution optimale de (P) correspond au nœud (P_3) :

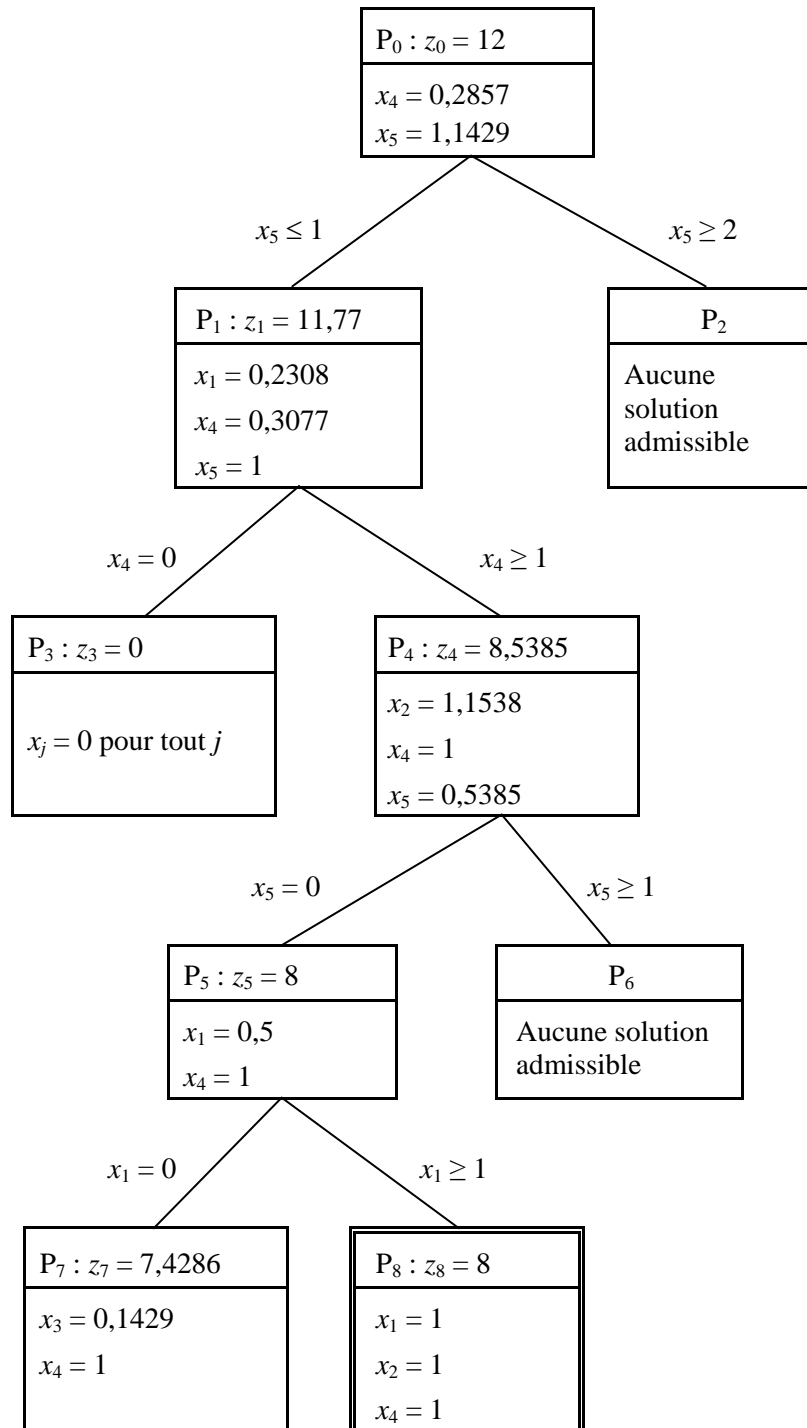
$$x_2 = 5 \quad x_5 = 10 \quad x_1 = x_3 = x_4 = 0 \quad z^* = 470.$$

Séparation		Solution optimale				Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
Nœud	Contraintes	x_1	x_2	x_5	z			
		0	7,1	9,4	$z_0 = 470,6$		$z^* \leq 470,6$	P_0
P_0	$x_5 \leq 9$	0	7,5	9	$z_1 = 459$		$z^* \leq 470,27$	P_1 P_2
	$x_5 \geq 10$	0,27	5	10	$z_2 = 470,27$			
P_2	$x_1 = 0$	0	5	10	$z_3 = 470$	x_3^* adm	$z^* = 470$	Aucun
	$x_1 \geq 1$	1	0	11	$z_4 = 452$	x_4^* adm		

(b) L'arbre d'énumération est reproduit à la page suivante. La solution optimale correspond au nœud (P_8) :

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_4 = 1 \quad x_3 = x_5 = 0 \quad z^* = 8.$$

Séparation		Valeurs optimales	Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
Nœud	Contraintes				
		$z_0 = 12$		$z^* \leq 12$	P_0
P_0	$x_5 \leq 1$	$z_1 = 11,77$		$z^* \leq 11,77$	P_1
	$x_5 \geq 2$		$Adm = \emptyset$		
P_1	$x_4 = 0$	$z_3 = 0$	x_3^* adm	$0 \leq z^* \leq 8,54$	P_4
	$x_4 \geq 1$	$z_4 = 8,54$			
P_4	$x_5 = 0$	$z_5 = 8$		$0 \leq z^* \leq 8$	P_5
	$x_5 \geq 1$		$Adm = \emptyset$		
P_5	$x_1 = 0$	$z_7 = 7,43$	$z_7 \leq z_8$	$z^* = 8$	Aucun
	$x_1 \geq 1$	$z_8 = 8$	x_8^* adm		

4-06b. Le critère du meilleur c_j et les problèmes de maximisation - Arbre d'énumération

7. Le critère de la variable la plus distante et les problèmes de maximisation

(a) Pour ce modèle, la suite des séparations est la même, qu'on utilise le critère de la variable la plus distante ou celui du meilleur c_j . On se reportera donc à la question (a) du problème 6 pour la solution optimale et le tableau résumant la séquence des séparations.

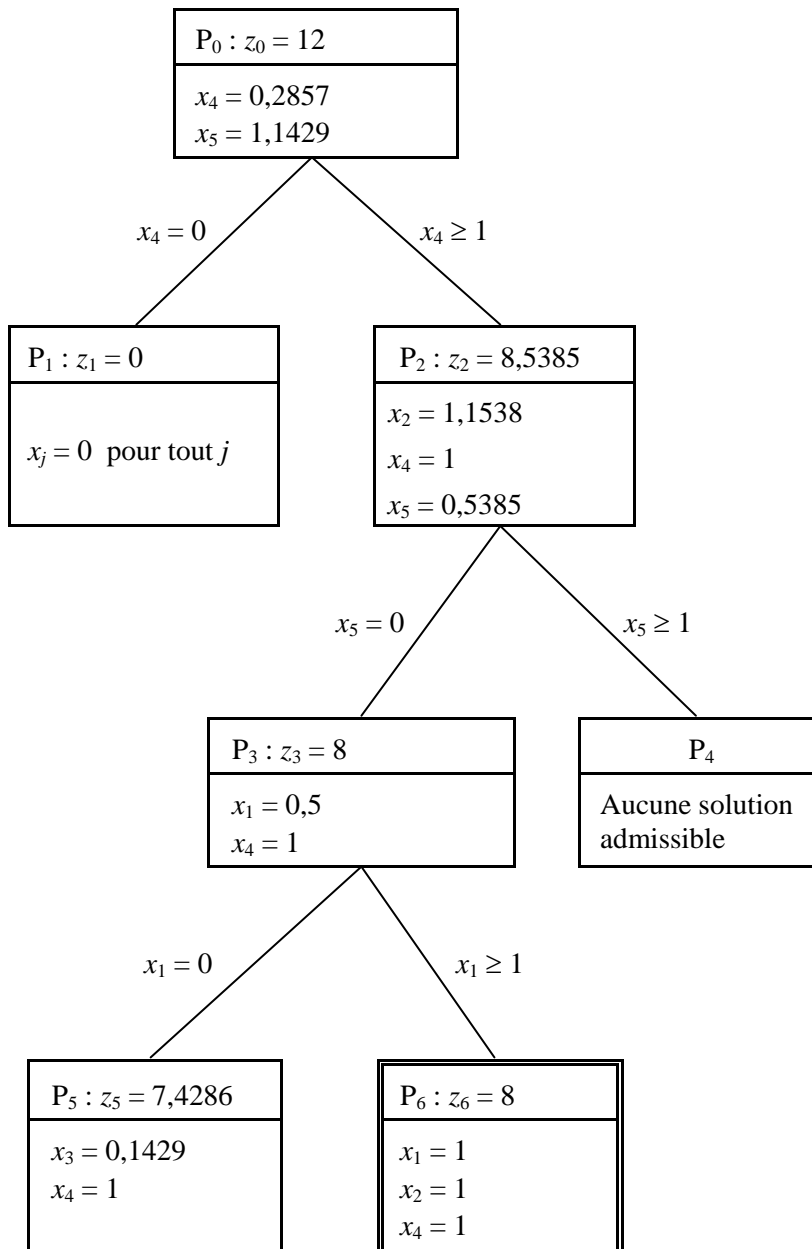
(b) Pour ce modèle, la suite des séparations dépend du critère retenu, mais la solution optimale obtenue est la même, qu'on utilise le critère de la variable la plus distante ou celui du meilleur c_j . Elle correspond, dans le cas du critère de la variable la plus distante, au nœud (P_6) :

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_4 = 1 \quad x_3 = x_5 = 0 \quad z^* = 8.$$

L'arbre d'énumération est reproduit à la page suivante; le tableau résumant la séquence des séparations est donné ci-dessous.

Séparation Nœud Contraintes	Valeurs optimales	Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
	$z_0 = 12$		$z^* \leq 12$	P_0
P_0 $x_4 = 0$ $x_4 \geq 1$	$z_1 = 0$ $z_2 = 8,54$	x_1^* adm	$0 \leq z^* \leq 8,54$	P_2
P_2 $x_5 = 0$ $x_5 \geq 1$	$z_3 = 8$	$Adm = \emptyset$	$0 \leq z^* \leq 8$	P_3
P_3 $x_1 = 0$ $x_1 \geq 1$	$z_5 = 7,43$ $z_6 = 8$	$z_5 \leq z_6$ x_6^* adm	$z^* = 8$	Aucun

4-07b. Le critère de la variable la plus distante et les problèmes de maximisation - Arbre



8. Le critère du meilleur c_j et les problèmes de minimisation

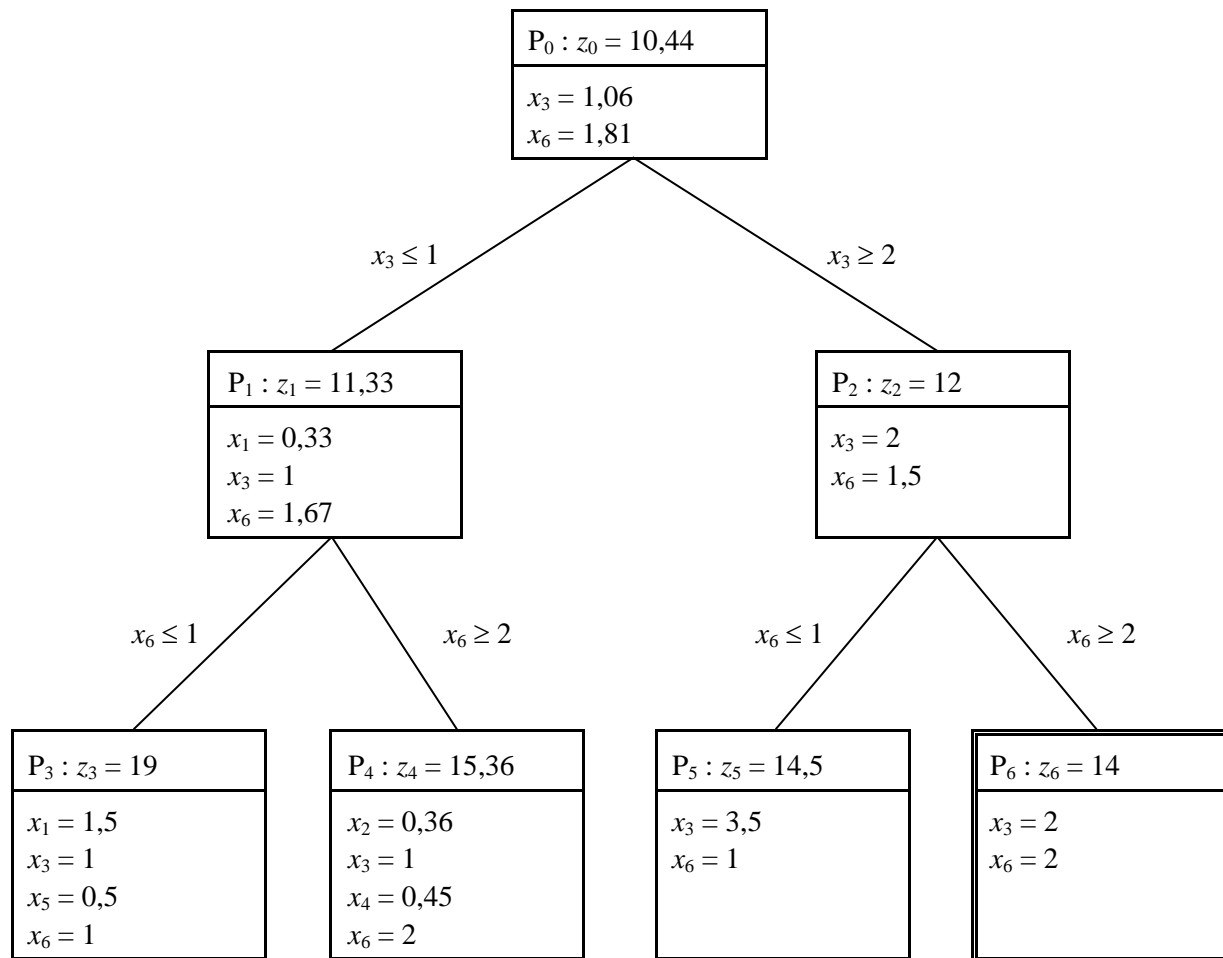
(a) La solution optimale correspond au nœud (P_6) : $x_3 = 8$; $x_4 = 1$; $x_1 = x_2 = 0$; $z^* = 33$.

Séparation		Solution optimale				Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
Nœud	Contraintes	x_1	x_3	x_4	z			
		0	4,3	1,4	$z_0 = 18,6$		$18,6 \leq z^*$	P_0
P_0	$x_4 \leq 1$	0	7,5	1	$z_1 = 31$		$31 \leq z^* \leq 54$	P_1
	$x_4 \geq 2$	0	13	2	$z_2 = 54$	x_2^* adm		
P_1	$x_3 \leq 7$	1	7	1	$z_3 = 34$	x_3^* adm	$32,94 \leq z^* \leq 34$	P_4
	$x_3 \geq 8$	0	8	0,94	$z_4 = 32,94$			
P_4	$x_4 = 0$	0	15,5	0	$z_5 = 62$	$z_5 \geq z_6$	$z^* = 33$	Aucun
	$x_4 \geq 1$	0	8	1	$z_6 = 33$	x_6^* adm		

(b) La séquence des séparations est décrite dans le tableau ci-dessous. L'arbre d'énumération est reproduit à la page suivante. La solution optimale correspond au nœud (P_6) :

$$x_3 = x_6 = 2; \quad x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0; \quad z^* = 14.$$

Séparation		Valeurs optimales	Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
Nœud	Contraintes				
		$z_0 = 10,44$		$10,44 \leq z^*$	P_0
P_0	$x_3 \leq 1$	$z_1 = 11,33$		$11,33 \leq z^*$	$P_1 P_2$
	$x_3 \geq 2$	$z_2 = 12$			
P_1	$x_6 \leq 1$	$z_3 = 19$		$12 \leq z^*$	$P_2 P_3 P_4$
	$x_6 \geq 2$	$z_4 = 15,36$			
P_2	$x_6 \leq 1$	$z_5 = 14,5$	$z_5 \geq z_6$	$z^* = 14$	Aucun
	$x_6 \geq 2$	$z_6 = 14$	x_6^* adm		

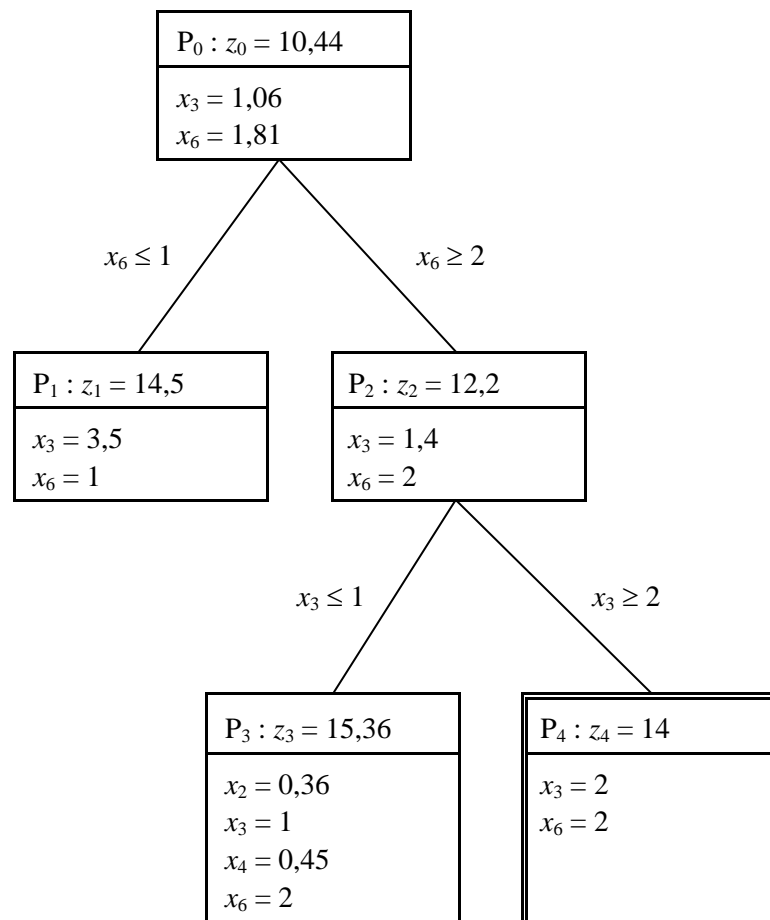
4-08b. Le critère du meilleur c_j et les problèmes de minimisation - Arbre d'énumération

9. Le critère de la variable la plus distante et les problèmes de minimisation

(a) Pour ce modèle, la suite des séparations est la même, qu'on utilise le critère de la variable la plus distante ou celui du meilleur c_j . On se reportera donc à la question (a) du problème précédent pour la solution optimale et le tableau résumant la séquence des séparations.

(b) La séquence des séparations et l'arbre d'énumération sont donnés ci-dessous. La solution optimale correspond au nœud (P_4) : $x_3 = x_6 = 2$; $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$; $z = 14$.

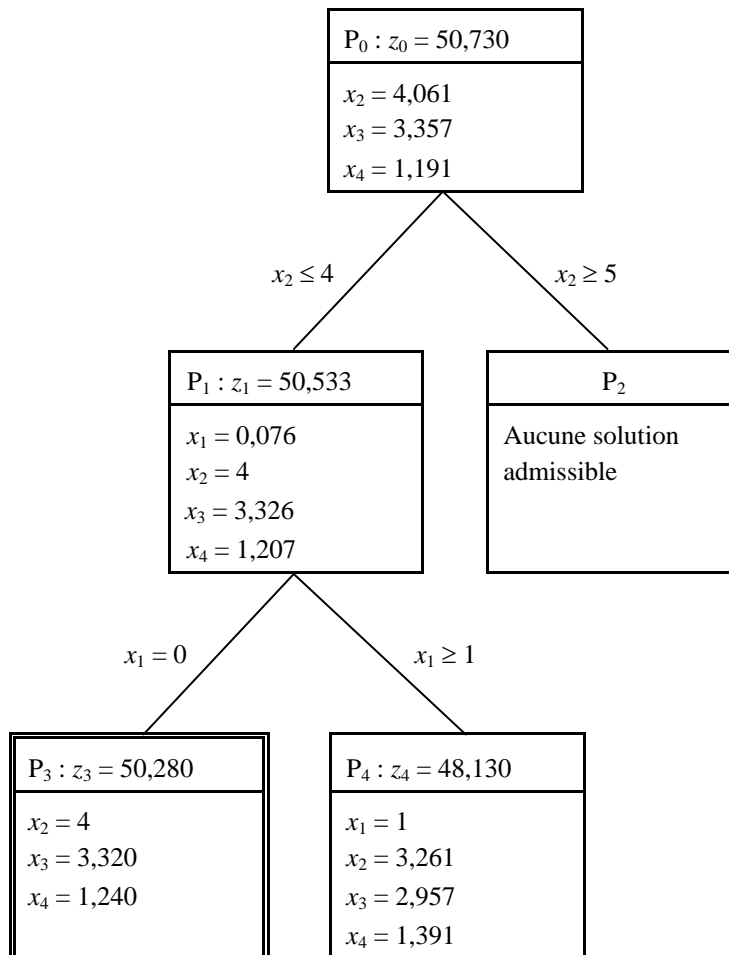
Séparation Nœud	Contraintes	Valeurs optimales	Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
		$z_0 = 10,44$		$10,44 \leq z^*$	P_0
P_0	$x_6 \leq 1$ $x_6 \geq 2$	$z_1 = 14,5$ $z_2 = 12,2$		$12,20 \leq z^*$	P_1 P_2
P_2	$x_3 \leq 1$ $x_3 \geq 2$	$z_3 = 15,36$ $z_4 = 14$	$z_3 \geq z_4$ \mathbf{x}_4^* adm	$z^* = 14$	Aucun



10. Un modèle mixte

La solution optimale correspond au nœud (P_3) qui satisfait à toutes les contraintes d'intégrité du modèle (P) même si les variables x_3 et x_4 y prennent des valeurs non entières.

Séparation		Valeurs optimales	Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
Nœud	Contraintes				
		$z_0 = 50,730$		$z^* \leq 50,730$	P_0
P_0	$x_2 \leq 4$ $x_2 \geq 5$	$z_1 = 50,533$	$Adm = \emptyset$	$z^* \leq 50,533$	P_1
P_1	$x_1 = 0$ $x_1 \geq 1$	$z_3 = 50,280$ $z_4 = 48,130$	x_3^* adm $z_4 \leq z_3$	$z^* = 50,280$	Aucun



11. Modèle PLTE et arbre d'énumération

- (a) Les nœuds (P_2) , (P_3) et (P_6) doivent être éliminés.
- (b) $942 \leq z^* \leq 970$.
- (c) La prochaine séparation s'effectue à partir du nœud (P_5) , selon la variable x_5 . Les contraintes à ajouter sur chacune des branches sont : $x_5 \leq 14$ et $x_5 \geq 15$.

12. Un arbre d'énumération partiel

- (a) Les nœuds (P_4) , (P_7) , (P_9) et (P_{10}) doivent être éliminés.
- (b) $50 \leq z^* \leq 51,5$.
- (c) La prochaine séparation s'effectue à partir du nœud (P_6) , selon la variable x_2 : en effet, selon la convention mentionnée au début de l'énoncé, on retient ici, en cas d'égalité entre plusieurs variables, celle de ces variables dont l'indice est le plus faible. Les contraintes à ajouter sur chacune des branches sont :

$$x_2 \leq 2 \quad \text{et} \quad x_2 \geq 3 .$$

13. Arbre d'énumération partiel et problème de minimisation

- (a) Le nœud (P_4) doit être éliminé, car sa solution optimale x_4^* est entière. Les nœuds (P_3) , (P_5) et (P_6) sont en attente.
- (b) $4\,697,75 \leq z^* \leq 4\,729$.
- (c) La prochaine séparation s'effectue à partir du nœud (P_5) , selon la variable x_2 . Les contraintes à ajouter sur chacune des branches sont : $x_2 \leq 17$ et $x_2 \geq 18$.
- (d) Il ne reste aucun nœud en attente après cette 4^e séparation. Et les inégalités relatives à z^* s'écrivent :

$$4\,698 \leq z^* \leq 4\,698 .$$

Note. La solution optimale x_8^* de (P_8) est donc une solution optimale du modèle (P) . Et $z^* = 4\,698$.

14. Un arbre dont les nœuds ne sont pas numérotés

- (a) $z = (80 \times 2,444) + (140 \times 0) + (40 \times 5,111) + (60 \times 0) + (220 \times 7,778) = 2\,111,1$
- (b) Le tableau suivant décrit la séquence des séparations. Après la séparation de (P_3) , le nœud (P_5) n'est plus en attente, car la solution optimale x_7^* de (P_7) est entière et donne à la fonction-objectif une valeur z_7 telle que $z_5 \leq z_7$.

Séparation		Valeurs optimales	Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
Nœud	Contraintes				
		$z_0 = 2111,1$		$z^* \leq 2111,1$	P_0
P_0	$x_1 \leq 2$ $x_1 \geq 3$	$z_1 = 2108,8$ $z_2 = 2110$		$z^* \leq 2110$	$P_1 P_2$
P_2	$x_5 \leq 7$ $x_5 \geq 8$	$z_3 = 2108$	$Adm = \emptyset$	$z^* \leq 2108,8$	$P_1 P_3$
P_1	$x_3 \leq 4$ $x_3 \geq 5$	$z_5 = 2100$ $z_6 = 2104$		$z^* \leq 2108$	$P_3 P_5 P_6$
P_3	$x_3 \leq 6$ $x_3 \geq 7$	$z_7 = 2100$ $z_8 = 2094,3$	x_7^* adm $z_8 \leq z_7$	$2100 \leq z^* \leq 2104$	P_6

(c) La prochaine séparation s'effectue à partir du nœud (P_6), selon la variable x_5 : en effet, puisque x_2 et x_5 sont à égale distance de l'entier le plus près, on recourt temporairement au critère du meilleur c_j ; or, dans la fonction-objectif, le coefficient c_5 de x_5 est plus élevé que celui de x_2 . Les contraintes ajoutées sur chacune des branches sont

$$x_5 \leq 7 \text{ et } x_5 \geq 8.$$

(d) Le nœud (P_6) est obtenu par l'ajout de l'inéquation « $x_3 \geq 5$ » au nœud (P_1), lequel est la relaxation (P_0) plus la contrainte « $x_1 \leq 2$ ». Le modèle linéaire (P_6) s'écrit donc ainsi :

$$\text{Max } z = 80 x_1 + 140 x_2 + 40 x_3 + 60 x_4 + 220 x_5$$

sous les contraintes :

$$x_1 + 2 x_2 + x_4 + 2 x_5 \leq 18$$

$$4 x_2 + 2 x_3 + 2 x_4 + x_5 \geq 18$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 12$$

$$2 x_2 + 5 x_3 + 5 x_4 + 7 x_5 \leq 80$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Note. Il ne faut pas inclure de contrainte d'intégrité, car (P_6), comme d'ailleurs tous les (P_h) de l'arbre, est un modèle linéaire continu.

15. La méthode SÉP et les cas d'égalité

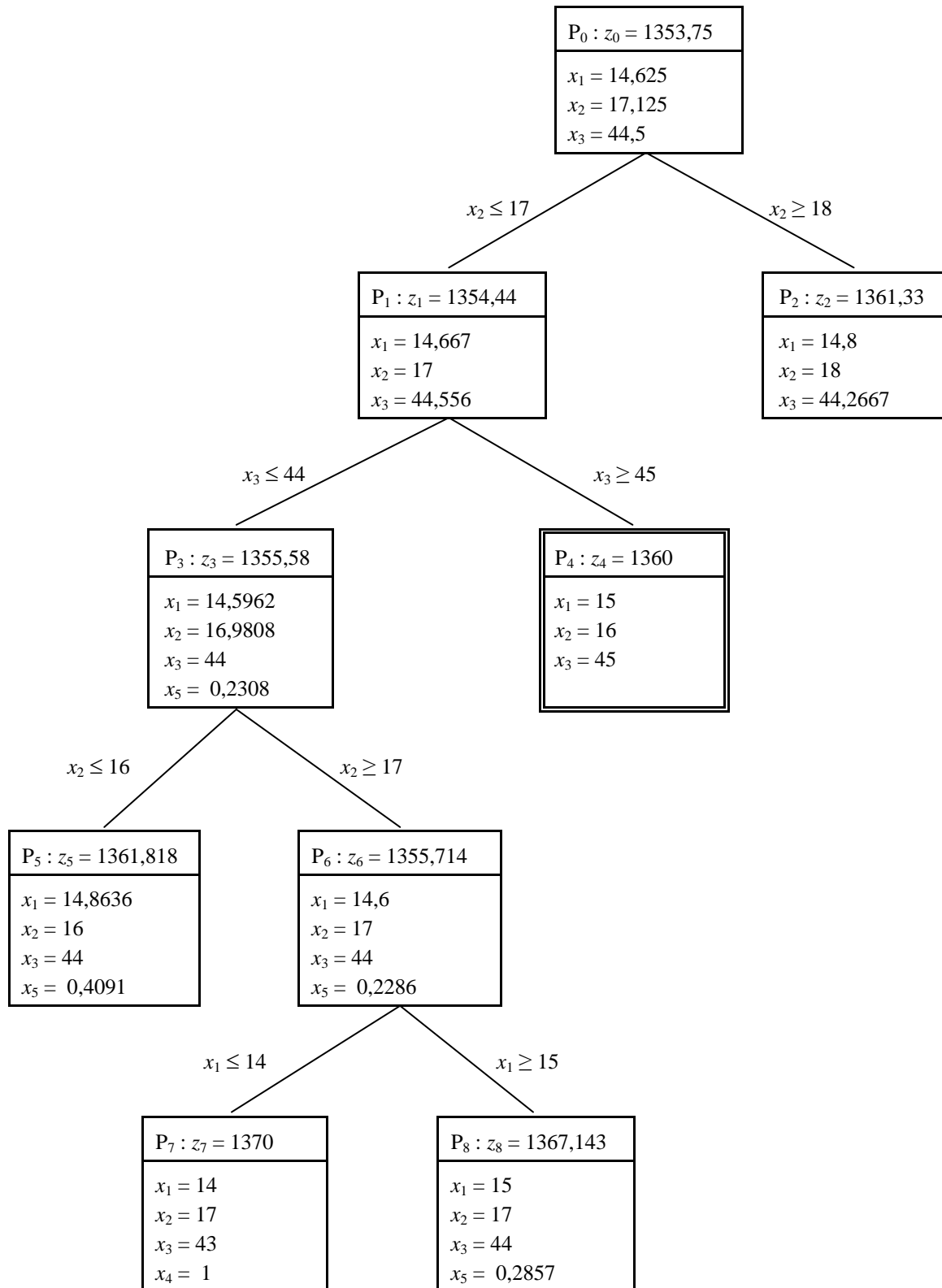
(a) La séquence des séparations est décrite au tableau ci-dessous; et l'arbre d'énumération associé est reproduit à la page suivante. Lors de la séparation de (P_1), il y a égalité entre les variables x_1 et x_3 , car leurs coefficients dans la fonction-objectif sont égaux. On recourt donc temporairement au critère de la variable la plus distante et la séparation se fait selon x_3 . La solution optimale du modèle correspond au nœud (P_4).

Séparation		Valeurs optimales	Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
Nœud	Contraintes				
		$z_0 = 1353,75$		$1353,75 \leq z^*$	P_0
P_0	$x_2 \leq 17$	$z_1 = 1354,44$		$1354,44 \leq z^*$	$P_1 P_2$
	$x_2 \geq 18$	$z_2 = 1361,33$			
P_1	$x_3 \leq 44$	$z_3 = 1355,58$		$1355,58 \leq z^* \leq 1360$	P_3
	$x_3 \geq 45$	$z_4 = 1360$	x_4^* adm		
P_3	$x_2 \leq 16$	$z_5 = 1361,818$	$z_5 \geq z_4$	$1355,71 \leq z^* \leq 1360$	P_6
	$x_2 \geq 17$	$z_6 = 1355,714$			
P_6	$x_1 \leq 14$	$z_7 = 1370$	x_7^* adm	$z^* = 1360$	Aucun
	$x_1 \geq 15$	$z_8 = 1367,143$	$z_8 \geq z_4$		

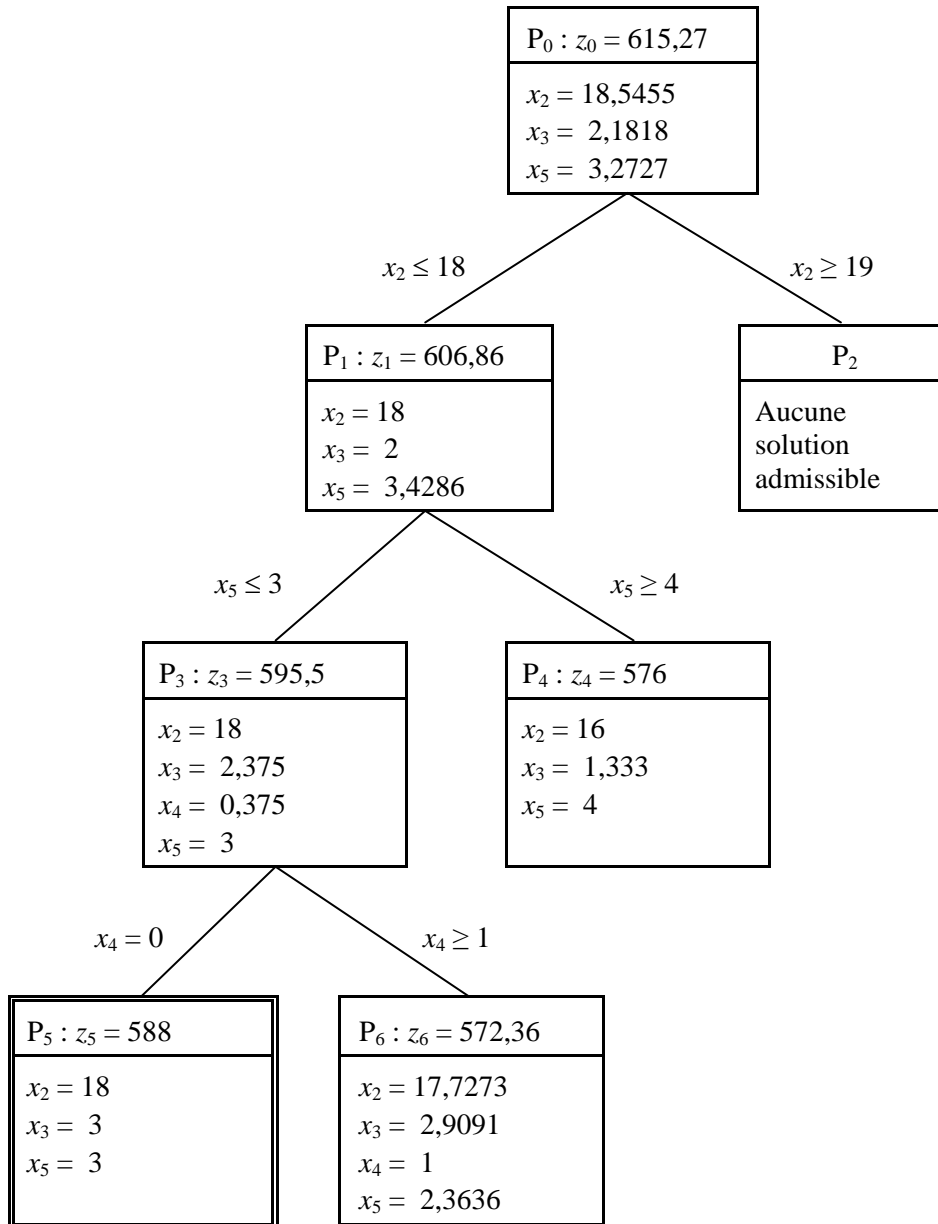
(b) La séquence des séparations est décrite au tableau ci-dessous; et l'arbre d'énumération associé est reproduit à la page 22. Lors de la séparation du nœud (P_3), il y a égalité entre les variables x_3 et x_4 , qui sont à la même distance de l'entier le plus près. On recourt donc temporairement au critère du meilleur c_j : c'est la variable x_4 qui sera retenue, car son coefficient dans la fonction-objectif est plus élevé et l'on cherche à maximiser. La solution optimale du modèle correspond au nœud (P_5).

Séparation		Valeurs optimales	Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
Nœud	Contraintes				
		$z_0 = 615,27$		$z^* \leq 615,27$	P_0
P_0	$x_2 \leq 18$	$z_1 = 606,86$	$Adm = \emptyset$	$z^* \leq 606,86$	P_1
	$x_2 \geq 19$				
P_1	$x_5 \leq 3$	$z_3 = 595,5$		$z^* \leq 595,5$	$P_3 P_4$
	$x_5 \geq 4$	$z_4 = 576$			
P_3	$x_4 = 0$	$z_5 = 588$	x_5^* adm	$z^* = 588$	Aucun
	$x_4 \geq 1$	$z_6 = 572,36$	$z_6 \leq z_5$		

4-15a. La méthode SÉP et les cas d'égalité - Arbre d'énumération



4-15b. La méthode SÉP et les cas d'égalité - Arbre d'énumération



(c) La séquence des séparations est décrite au tableau ci-dessous. Lors de la séparation du nœud (P_0), il y a égalité entre les variables x_2 et x_5 , car leurs coefficients dans la fonction-objectif sont égaux. De plus, dans la solution optimale x_0^* de (P_0), ces deux variables sont à la même distance de l'entier le plus près. Il serait correct de retenir l'une ou l'autre de ces variables candidates. Cependant, au lieu de choisir au hasard, nous avons préféré les départager à l'aide du critère du plus petit indice : on retiendra donc x_2 comme variable selon laquelle séparer. La solution optimale du modèle correspond au nœud (P_1).

Séparation		Solution optimale			Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
Nœud	Contraintes	x_2	x_5	z			
		8,75	8,25	$z_0 = 204$		$z^* \leq 204$	P_0
P_0	$x_2 \leq 8$ $x_2 \geq 9$	8	9	$z_1 = 204$	x_1^* adm $Adm = \emptyset$	$z^* = 204$	Aucun

(d) La séquence des séparations est décrite au tableau ci-dessous. Lors de la 2^e séparation, il y a égalité entre les nœuds (P_1) et (P_2), car $z_1 = z_2 = 45$. Il serait correct de retenir l'un ou l'autre de ces nœuds candidats. Cependant, au lieu de choisir au hasard, nous avons préféré les départager à l'aide de la remarque suivante : parmi les coordonnées des solutions optimales x_1^* et x_2^* associées aux deux nœuds candidats, la variable la plus distante de l'entier le plus près apparaît dans le nœud (P_1) : il s'agit en effet de x_1 qui, dans (P_1), prend la valeur 2,85. Nous avons donc décidé de séparer le nœud (P_1). La solution optimale du modèle correspond au nœud (P_7).

Séparation		Solution optimale				Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
Nœud	Contraintes	x_1	x_2	x_4	z			
		2,40	0	6,45	$z_0 = 35,1$		$35,1 \leq z^*$	P_0
P_0	$x_4 \leq 6$ $x_4 \geq 7$	2,85	0	6	$z_1 = 45$ $z_2 = 45$		$45 \leq z^*$	P_1 P_2
P_1	$x_1 \leq 2$ $x_1 \geq 3$	2	0,57	6	$z_3 = 66,67$ $z_4 = 48$	$z_3 \geq z_4$ x_4^* adm	$45 \leq z^* \neq 48$	P_2
P_2	$x_1 \leq 2$ $x_1 \geq 3$	2	1,9	7	$z_5 = 159$ $z_6 = 45,9$	$z_5 \geq z_4$	$45,9 \leq z^* \leq 48$	P_6
P_6	$x_4 \leq 7$ $x_4 \geq 8$	3	0	7	$z_7 = 46$ $z_8 = 63$	x_7^* adm $z_8 \geq z_7$	$z^* = 46$	Aucun

16. Un problème d'embauche

(a) Définition des variables de décision :

x_{iJ} = nombre de candidats de la spécialité i affectés à la production de J

y_{iJ} = nombre de jours de travail des employés de spécialité i consacrés à la production de J .

Le modèle s'écrit :

$$\text{Min } z = 150(x_{1A} + x_{1B}) + 200(x_{2A} + x_{2B}) + 200(y_{1A} + y_{1B}) + 210(y_{2A} + y_{2B})$$

sous les contraintes :

$$\text{DISP S1} \quad x_{1A} + x_{1B} \leq 12$$

$$\text{DISP S2} \quad x_{2A} + x_{2B} \leq 8$$

$$\text{CONTRAT A} \quad 60 y_{1A} + 48 y_{2A} \geq 8\,000$$

$$\text{CONTRAT B} \quad 48 y_{1B} + 64 y_{2B} \geq 12\,000$$

$$\text{MAXJ 1A} \quad -20 x_{1A} + y_{1A} \leq 0$$

$$\text{MAXJ 1B} \quad -20 x_{1B} + y_{1B} \leq 0$$

$$\text{MAXJ 2A} \quad -25 x_{2A} + y_{2A} \leq 0$$

$$\text{MAXJ 2B} \quad -25 x_{2B} + y_{2B} \leq 0$$

$$x_{iJ} \geq 0 \text{ et entier}$$

$$y_{iJ} \geq 0.$$

(b) Le tableau de la page suivante décrit les séparations successives lorsque le modèle (P) est résolu selon le critère de la variable la plus distante. La figure donne l'arbre d'énumération résultant de ces séparations. Une solution optimale donne :

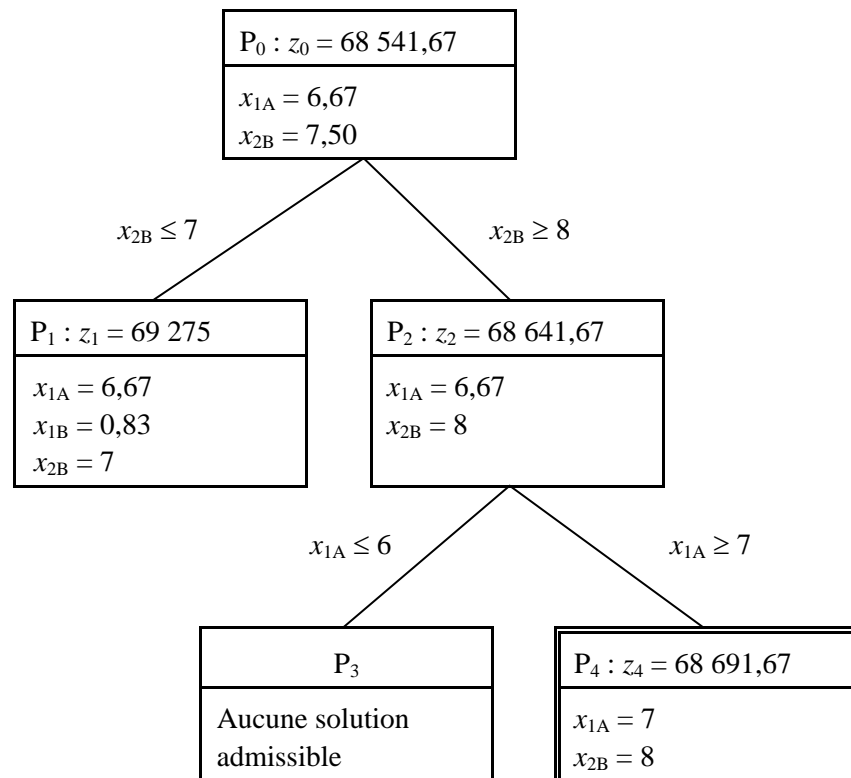
$$x_{1A} = 7 \quad y_{1A} = 133,333$$

$$x_{2B} = 8 \quad y_{2B} = 187,5$$

$$z = 68\,691,67.$$

4-16. Un problème d'embauche - Séquence des séparations et arbre d'énumération

Séparation Nœud Contraintes	Valeurs optimales	Nœuds éliminés	$z \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
	$z_0 = 68\,541,67$		$68\,541,67 \leq z^*$	P_0
P_0 $x_{2B} \leq 7$ $x_{2B} \geq 8$	$z_1 = 69\,275$ $z_2 = 68\,641,67$		$68\,641,67 \leq z^*$	$P_1 P_2$
P_2 $x_{1A} \leq 6$ $x_{1A} \geq 7$	$z_4 = 68\,691,67$	$Adm = \emptyset$ $x_4^* \text{ adm}$	$z^* = 68\,691,67$	Aucun



17. Les panneaux de bois

(a) Définition des variables de décision :

x_J = nombre de rafales confiées à l'équipe J

y = nombre total de panneaux produits.

Le modèle s'écrit :

$$\text{Max } z = y$$

sous les contraintes :

$$\text{FIXATION} \quad -6x_A - 9x_B - 9x_C + y \leq 0$$

$$\text{PLACAGE} \quad -16x_A - 12x_B - 12x_C + 2y \leq 2\,500$$

$$\text{OKOUMÉ} \quad 40x_A + 60x_B + 40x_C \leq 40\,000$$

$$\text{RÉSINE} \quad 20x_A + 24x_B + 22x_C \leq 16\,000$$

$$\text{CLAUSE B} \quad -x_A + x_B - x_C \geq 0$$

$$\text{CLAUSE A} \quad x_A - x_C \leq 20$$

$$x_J \geq 0 \text{ et entier}$$

tout J

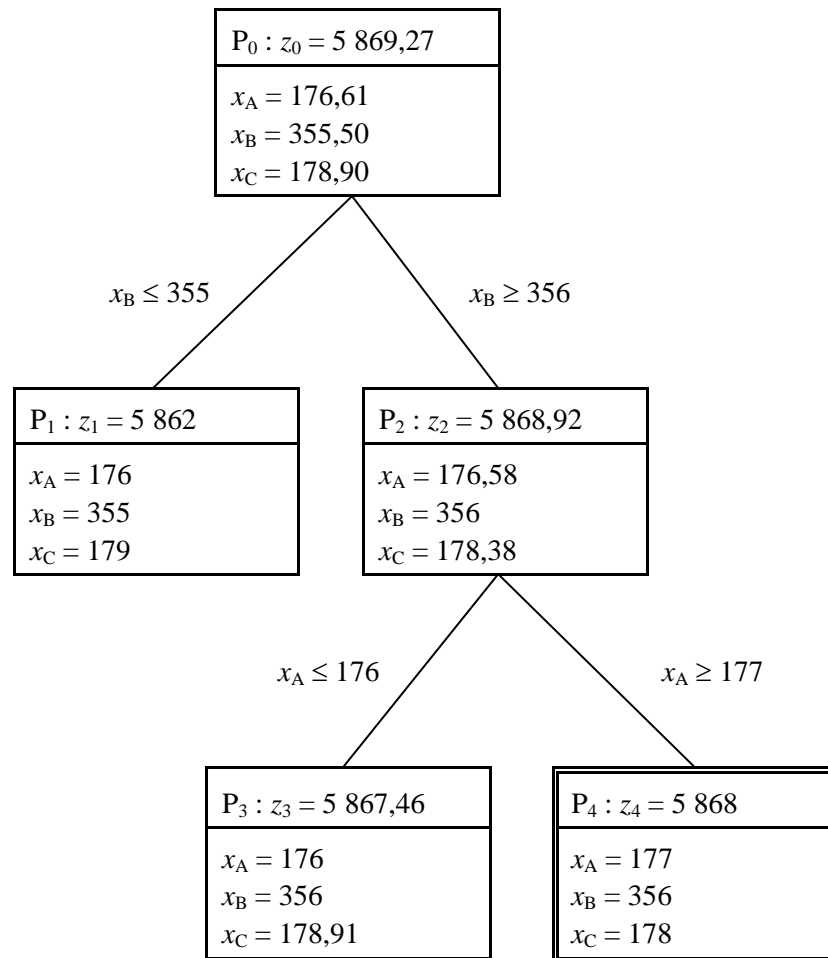
$$y \geq 0.$$

Noter que l'intégrité de y est garantie par celle des variables x_j en vertu des deux premières contraintes technologiques et de l'objectif de maximisation. Les séparations seront donc limitées aux variables x_j .

(b) Le tableau ci-dessous décrit les séparations successives lorsque le modèle (P) est résolu selon le critère de la variable la plus distante. La figure de la page suivante donne l'arbre d'énumération résultant de ces séparations. L'usine peut produire 5 868 panneaux au maximum : elle atteindra ce maximum en confiant 177 rafales à l'équipe A, 356 rafales à B et 178 rafales à C.

Séparation Nœud Contraintes	Valeurs optimales	Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
	$z_0 = 5\,869,27$		$z^* \leq 5\,869,27$	P_0
P_0 $x_B \leq 355$ $x_B \geq 356$	$z_1 = 5\,862$ $z_2 = 5\,868,92$	x_1^* adm	$5\,862 \leq z^* \leq 5\,868,92$	P_2
P_2 $x_A \leq 176$ $x_A \geq 177$	$z_3 = 5\,867,46$ $z_4 = 5\,868$	$z_3 \leq z_4$ x_4^* adm	$z^* = 5\,868$	Aucun

4-17. Les panneaux de bois - Arbre d'énumération



18. Le rapatriement des pèlerins.

(a) Le tableau de la page suivante décrit les 10 premières séparations lorsqu'on résout le modèle (P) selon le critère du meilleur c_j . Les valeurs des variables dans les solutions optimales des différents nœuds sont données ci-dessous.

N°	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}
0	5,21	4,38	0	0	5,62	0	4,79	0	3,43
1	4,84	4,74	0	0	5,26	0,33	5,16	0	3
2	5,21	4,38	0	0	5,62	0	4,28	0	4
3	5	4,58	0	0	5,27	0,33	5	0,15	3
4	4	5,56	0	0	4,44	1,08	6	0	2,05
5	5,60	4	0	0	5,30	0,30	4,40	0,70	3
6	4,57	5	0	0,43	4,85	0,34	5	0,15	3
7	6	3,61	0	0	5,31	0,28	4	1,07	3
8	5	4	0,70	0	5,63	0	5	0,38	2,72
9	6,63	3	0	0	5,34	0,26	3,37	1,66	3
10	5,60	4	0	0,40	4,93	0,30	4	1,07	3
11	3,96	5,59	0	0	4,41	1,11	6,04	0	2
12	4	5,56	0	0	4,44	1,08	6	0	3
13	4	5,56	0	0	4,41	1,11	6	0,04	2
14	3	6,53	0	0	3,47	1,97	7	0	0,91
15	4	5	0,67	0	4,96	0,61	6	0,04	2
16	3,54	6	0	0,46	3,96	1,13	6	0,04	2
17	7	2,64	0	0	5,36	0,24	3	2	3
18	6	3	0,73	0	5,63	0	4	1,38	2,63
19	7,66	2	0	0	5,39	0,21	2,34	2,61	3
20	6,63	3	0	0,37	5	0,25	3	2	3

(b) Pour rapatrier les 340 pèlerins à destination de New York, il faudra 10 cars dans le meilleur des cas : en effet, c'est le transporteur 2 qui offre les cars de plus grande capacité et au moins $340/36 = 9,444$ véhicules seront requis. Et il faut évidemment arrondir vers le haut, 9 cars pouvant accommoder au maximum $9 \times 36 = 324$ passagers. Les membres droits des 3 contraintes additionnelles s'obtiennent donc de la façon suivante, où $\lceil x \rceil$ dénote le plus petit entier qui est $\geq x$ (par exemple, $\lceil 3,7 \rceil = 4$ et $\lceil 3 \rceil = 3$) :

$$\text{MIN CAR NY} \quad 340 / \max \{35; 36; 30\} = 340 / 36 = \lceil 9,444 \rceil = 10$$

$$\text{MIN CAR CH} \quad 180 / \max \{30; 32; 35\} = 180 / 35 = \lceil 5,143 \rceil = 6$$

$$\text{MIN CAR SL} \quad 195 / \max \{25; 27; 22\} = 195 / 27 = \lceil 7,222 \rceil = 8.$$

MOG4-18. Séquence des séparations pour le modèle sans les contraintes additionnelles

Séparation Nœud Contraintes	Valeurs optimales	Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
	$z_0 = 26\ 648,21$		$26\ 648,21 \leq z^*$	P_0
P_0 $x_{33} \leq 3$ $x_{33} \geq 4$	$z_1 = 26\ 651,33$ $z_2 = 26\ 673,50$		$26\ 651,33 \leq z^*$	$P_1 P_2$
P_1 $x_{31} \leq 5$ $x_{31} \geq 6$	$z_3 = 26\ 652,22$ $z_4 = 26\ 658,33$		$26\ 652,22 \leq z^*$	$P_2 P_3 P_4$
P_3 $x_{12} \leq 4$ $x_{12} \geq 5$	$z_5 = 26\ 655,56$ $z_6 = 26\ 664,37$		$26\ 655,56 \leq z^*$	$P_2 P_4 P_5 P_6$
P_5 $x_{31} \leq 4$ $x_{31} \geq 5$	$z_7 = 26\ 657,78$ $z_8 = 26\ 725,63$		$26\ 657,78 \leq z^*$	$P_2 P_4 P_6 P_7 P_8$
P_7 $x_{12} \leq 3$ $x_{12} \geq 4$	$z_9 = 26\ 661,27$ $z_{10} = 26\ 669,11$		$26\ 658,33 \leq z^*$	$P_2 P_4 P_6 P_8 P_9 P_{10}$
P_4 $x_{33} \leq 2$ $x_{33} \geq 3$	$z_{11} = 26\ 658,67$ $z_{12} = 26\ 645,33$		$26\ 658,67 \leq z^*$	$P_2 P_6 P_8 P_9 P_{10} P_{11}$ P_{12}
P_{11} $x_{31} \leq 6$ $x_{31} \geq 7$	$z_{13} = 26\ 658,89$ $z_{14} = 26\ 666,67$		$26\ 658,89 \leq z^*$	$P_2 P_6 P_8 P_9 P_{10} P_{12} P_{13}$ P_{14}
P_{13} $x_{12} \leq 5$ $x_{12} \geq 6$	$z_{15} = 26\ 725,56$ $z_{16} = 26\ 671,84$		$26\ 661,27 \leq z^*$	$P_2 P_6 P_8 P_9 P_{10} P_{12} P_{14}$ $P_{15} P_{16}$
P_9 $x_{31} \leq 3$ $x_{31} \geq 4$	$z_{17} = 26\ 663,33$ $z_{18} = 26\ 735,63$		$26\ 663,33 \leq z^*$	$P_2 P_6 P_8 P_{10} P_{12} P_{14} P_{15}$ $P_{16} P_{17} P_{18}$
P_{17} $x_{12} \leq 2$ $x_{33} \geq 3$	$z_{19} = 26\ 666,98$ $z_{20} = 26\ 673,86$		$26\ 664,37 \leq z^*$	$P_2 P_6 P_8 P_{10} P_{12} P_{14} P_{15}$ $P_{16} P_{18} P_{19} P_{20}$

(c) La résolution du modèle avec les contraintes additionnelles exige seulement 2 séparations! Les tableaux ci-dessous décrivent, l'un la séquence des séparations, l'autre les valeurs des variables dans les solutions optimales des différents nœuds.

Séparation		Valeurs optimales	Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
Nœud	Contraintes				
		$z_0 = 27\ 351,60$		$27\ 351,60 \leq z^*$	P_0
P_0	$x_{33} \leq 2$	$z_1 = 27\ 370,50$		$27\ 353 \leq z^*$	$P_1 P_2$
	$x_{33} \geq 3$	$z_2 = 27\ 353$			
P_2	$x_{13} \leq 3$	$z_3 = 27\ 357$	$x_3^* \text{ adm}$ $z_4 \geq z_3$	$z^* = 27\ 357$	Aucun
	$x_{13} \geq 4$	$z_4 = 27\ 473$			

N°	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}
0	0	6,67	3,33	6	0	0	4	1,40	2,60
1	0	6,67	3,33	4,50	1,50	0	5,50	0,50	2
2	0	6,67	3,33	6	0	0	3	2	3
3	0	7	3	6	0	0	3	2	3
4	0	6,11	4	6	0	0	3	2	3

(d) Seule la 2^e des contraintes additionnelles est affectée par le changement de données. Le nouveau membre droit se calcule ainsi : $160 / \max \{30; 32; 35\} = 160 / 35 = \lceil 4,571 \rceil = 5$. Enfin, le tableau de la page suivante décrit les séparations, tandis que les valeurs des variables x_{ij} sont données ci-dessous.

N°	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}
0	5,43	2,14	2,43	0	5	0	1,57	2,86	3,57
1	3,60	3,67	2,73	0,40	4,33	0,27	3	2	3
2	6,20	1,50	2,30	0	5	0	0,5	3,50	4
3	6,56	1,20	2,24	0	5	0	0	3,80	4,20
4	5,64	1,96	2,39	0	5	0	1	3,04	4
5	6,80	1	2,20	0	5	0	0	4	4
6	6,15	1,85	2	0	5	0	0	3,15	5
7	6	2	2	0	5	0	1	3	4,05
8	2	5	3	0	5	0	4,28	0	4
9	5,94	2,06	2	0,06	4,91	0,04	1	3,04	4
10	5,22	2,78	2	0	5	0	1	2,22	5
11	6	2	2	0	4,96	0,04	1	3,04	4
12	5	3	2	0,15	4,75	0,10	1,85	2,25	4
13	6	2	2	0	4	1	1	3,04	4
14	6	2	2	0	5	0	1	3	4
15	7	1	2	0	5	0	0	4	4
16	6,11	1	3	0	5	0	0	4	4
17	2,50	5,50	2	1,50	2,50	1	3	2	3
18	2	5	3	0,20	4,67	0,13	4,8	0,33	3

MOG4-18. Séparations avec les données modifiées et les contraintes additionnelles

Séparation Nœud Contraintes	Valeurs optimales	Nœuds éliminés	$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$	Nœuds en attente
	$z_0 = 26\ 282,14$		$26\ 282,14 \leq z^*$	P_0
P_0 $x_{33} \leq 3$ $x_{33} \geq 4$	$z_1 = 26\ 323$ $z_2 = 26\ 287,50$		$26\ 287,50 \leq z^*$	$P_1 P_2$
P_2 $x_{31} = 0$ $x_{31} \geq 1$	$z_3 = 26\ 290$ $z_4 = 26\ 297,22$		$26\ 290 \leq z^*$	$P_1 P_3 P_4$
P_3 $x_{33} \leq 4$ $x_{33} \geq 5$	$z_5 = 26\ 322$ $z_6 = 26\ 344,44$		$26\ 297,22 \leq z^*$	$P_1 P_4 P_5 P_6$
P_4 $x_{13} \leq 2$ $x_{13} \geq 3$	$z_7 = 26\ 306$ $z_8 = 26\ 361$		$26\ 306 \leq z^*$	$P_1 P_5 P_6 P_7 P_8$
P_7 $x_{33} \leq 4$ $x_{33} \geq 5$	$z_9 = 26\ 310,06$ $z_{10} = 26\ 366,67$		$26\ 310,06 \leq z^*$	$P_1 P_5 P_6 P_8 P_9 P_{10}$
P_9 $x_{12} \leq 3$ $x_{12} \geq 4$	$z_{11} = 26\ 311$ $z_{12} = 26\ 340,75$		$26\ 311 \leq z^*$	$P_1 P_5 P_6 P_8 P_{10} P_{11} P_{12}$
P_{11} $x_{22} \leq 4$ $x_{22} \geq 5$	$z_{13} = 26\ 519$ $z_{14} = 26\ 402$		$26\ 322 \leq z^*$	$P_1 P_5 P_6 P_8 P_{10} P_{12} P_{13}$ P_{14}
P_5 $x_{13} \leq 2$ $x_{13} \geq 3$	$z_{15} = 26\ 325$ $z_{16} = 26\ 442$	x_{15}^* adm	$26\ 323 \leq z^* \leq 26\ 325$	P_1
P_1 $x_{13} \leq 2$ $x_{13} \geq 3$	$z_{17} = 26\ 471,50$ $z_{18} = 26\ 334$		$z^* = 26\ 325$	Aucun

La solution optimale correspond au nœud (P_{15}) :

$$x_{11} = 7 \text{ et } x_{12} = 1 \text{ et } x_{13} = 2 \text{ et } x_{22} = 5 \text{ et } x_{32} = x_{33} = 4 \text{ et } x_{21} = x_{23} = x_{31} = 0$$

$$z = 26\ 325.$$