Chapitre 3 – Solutions des problèmes

1. Les jouets.

(a) Le modèle comporte deux variables de décision définies de la façon suivante :

x_J = nombre de jouets de type J fabriqués en usine le mois prochain,

où J = A, B. L'objectif est de maximiser z, où

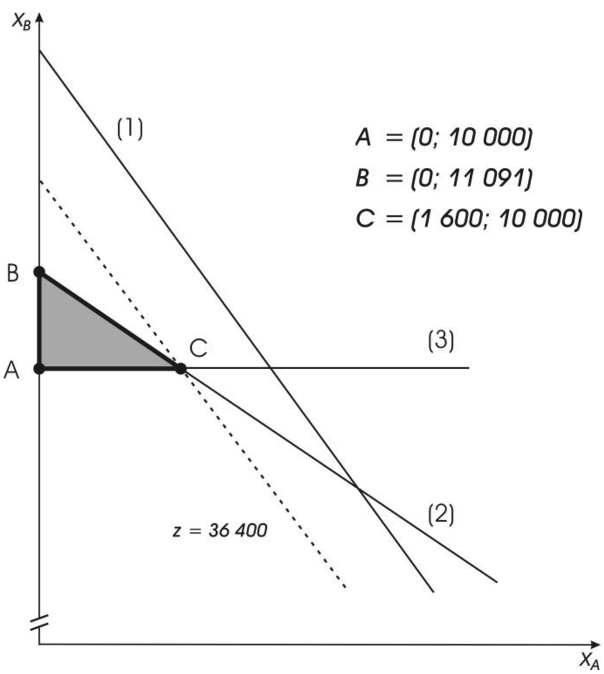
$$z = 4\,x_A + 3\,x_B\,,$$

sous les contraintes technologiques suivantes :

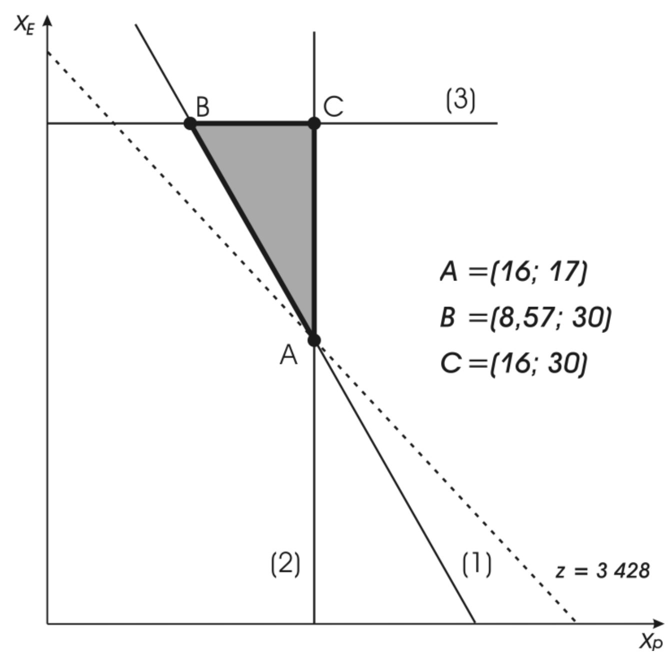
Atelier 1	$4{,}50\,x_A + 3{,}2\,x_B \leq 43\,500$
Atelier 2	$2{,}25\,x_A + 3{,}3\,x_B \leq 36\,600$
Min B	$x_B \geq 10\,000.$

(bc) La résolution graphique de ce modèle est illustrée à la figure de gauche ci-dessous. L'unique solution optimale, qui correspond au point C, est donnée par :

$$x_A = 1\,600 \quad \text{et} \quad x_B = 10\,000 \quad \text{et} \quad z = 36\,400 \quad \text{(dollars).}$$



Région admissible de MOG3-01



Région admissible de MOG3-02

2. Les arbustes.

(a) Le modèle comporte deux variables de décision définies de la façon suivante :

x_P = nombre de planteurs expérimentés recrutés par l'agence

x_E = nombre d'étudiants recrutés par l'agence.

L'objectif est de minimiser z, où

$$z = 108\, x_P + 100\, x_E\,,$$

sous les contraintes technologiques suivantes :

Arbustes	$700\, x_P + 400\, x_E \;\geq\; 18\,000$
Experts	$x_P \;\leq\; 16$
Étudiants	$x_E \;\leq\; 30.$

Note. La fonction-objectif représente le coût quotidien (en dollars) de l'équipe de travailleurs. Or, un planteur expérimenté revient à $(8 \times 10) + (2\% \times 700 \times 2) = 108$ dollars par jour.

(bc) La résolution graphique de ce modèle est illustrée à la figure de droite ci-dessus (voir page précédente). L'unique solution optimale, qui correspond au point A, est donnée par :

$$x_P = 16 \quad \text{et} \quad x_E = 17 \quad \text{et} \quad z = 3\,428 \ \text{(dollars)}.$$

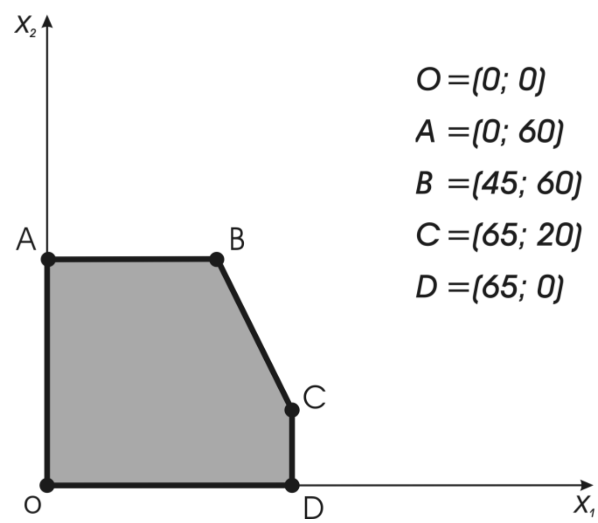
3. Fabrication de deux produits.

(a) $z = 32\, x_1 + 20\, x_2$

(b) La région admissible est le polygone OABCD. Le maximum est atteint au sommet B : en ce point,

$$z = (32 \times 45) + (20 \times 60) = 2640.$$

Le plan optimal de production consiste donc à fabriquer 45 unités de P1 et 60 unités de P2; les ventes du mois s'élèvent alors à 2 640 $.



(c) $2\, x_1 + 1\, x_2 \;\leq 150$

Le point optimal B satisfait à cette inéquation. Par conséquent, l'ajout de cette contrainte ne modifie pas la solution optimale.

(d) On pose :

x_s = nombre d'heures supplémentaires le mois prochain dans l'atelier d'assemblage.

Seule la 1re contrainte est modifiée. Elle devient : $x_1 + 0{,}5\, x_2 - x_s \;\leq\; 75.$

(e) On pose :

y_j = montant (en $) investi en publicité pour le produit Pj,

où $j = 1, 2$. Seules les contraintes (3) et (4) sont modifiées. Elles deviennent :

$$x_1 - 10\, y_1 \;\leq\; 65 \quad \text{et} \quad x_2 - 15\, y_2 \;\leq\; 60.$$

Et on ajoute l'inéquation suivante :

$$y_1 + y_2 \;\leq\; 100.$$

(f) $z' = Ventes - TravHRég - TravHSup - Matériau - Pub$

où

$$\begin{aligned} Ventes &= 32\,x_1 + 20\,x_2 \\ TravHRég &= 8(\,x_1 + 0{,}5\,x_2 + 1{,}5\,x_1 + 0{,}8\,x_2\,) \\ TravHSup &= 12\,x_s \\ Matériau &= 3(\,2\,x_1 + x_2\,) \\ Pub &= y_1 + y_2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$z' = 6\,x_1 + 6{,}6\,x_2 - 12\,x_s - y_1 - y_2.$$

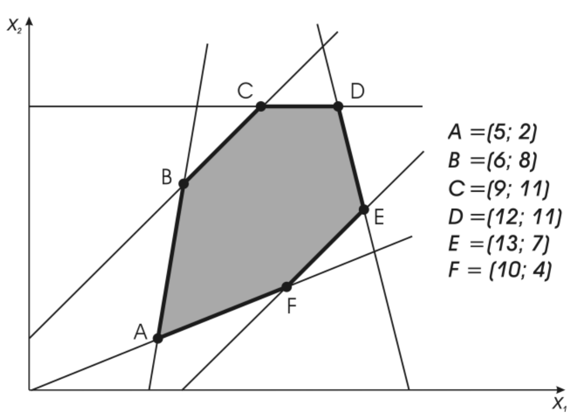
4. Un polygone irrégulier.

(a) La région admissible de ce modèle linéaire est le polygone ABCDEF de la figure de gauche ci-dessous.

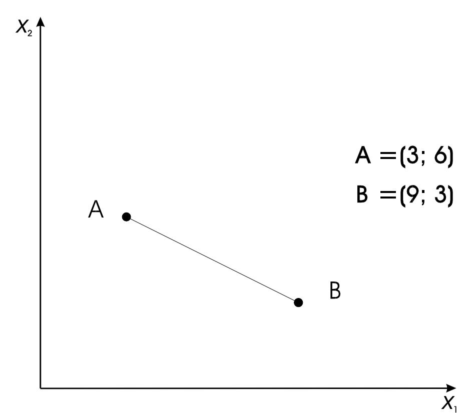
(b) Les sommets où les fonctions z_h atteignent leur maxima sont donnés dans l'avant-dernière ligne du tableau ci-dessous. Tous les points du segment de droite joignant les sommets B et C sont des maxima de z_2.

Sommet	x_1	x_2	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
A	5	2	34	-15	-11	11	39
B	6	8	80	10	-2	2	114
C	9	11	113	10	-5	5	159
D	12	11	125	-5	-14	14	168
E	13	7	101	-30	-25	25	123
F	10	4	68	-30	-22	22	78
Maximum atteint au(x) sommet(s)			D	B, C	B	E	D
Minimum atteint au(x) sommet(s)			A	E, F	E	B	A

(c) Les sommets où les fonctions z_h atteignent leur minima sont donnés dans la dernière ligne du tableau. Tous les points du segment de droite joignant les sommets E et F sont des minima de z_2.



Région admissible de MOG3-04



Région admissible de MOG3-05

5. Un segment de droite.

(a) La région admissible de ce modèle linéaire est le segment de droite AB de la figure de droite ci-dessus (voir page précédente).

(b) Le sommet A est l'unique optimum de ce modèle :

en A, $z = (3 \times 3) - (7 \times 6) = -33$
en B, $z = (3 \times 9) - (7 \times 3) = +6$.

6. Fonctions-objectifs comportant un paramètre.

(a) La région admissible de ce modèle linéaire est le polygone ABCD de la figure de gauche donnée ci-dessous.

(b) La pente $m = -c_1 / 11$ des courbes de niveau de z doit être (strictement) comprise entre les pentes des segments de droite BC et CD :

$$\text{pente de CD} < \text{pente de } z < \text{pente de BC}$$

$$\frac{6-11}{17-12} < \frac{-c_1}{11} < \frac{11-6}{12-7}$$

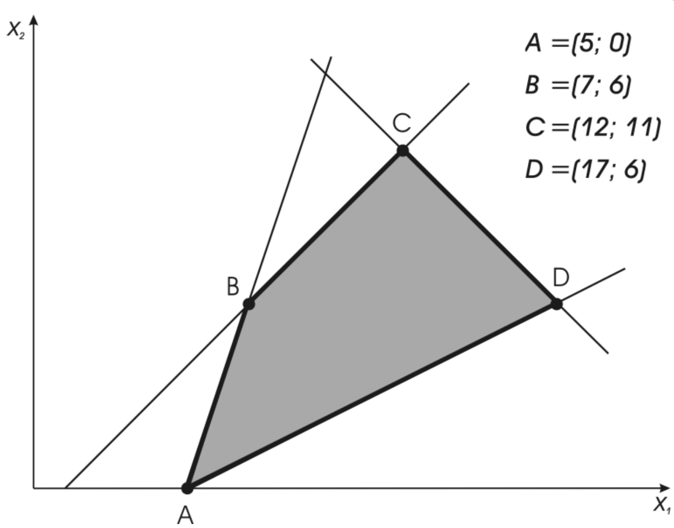
$$-11 < -c_1 < 11$$

$$-11 < c_1 < 11.$$

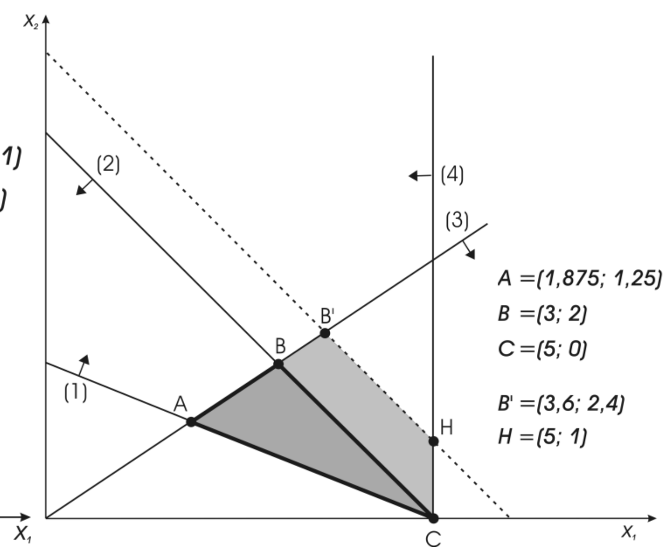
(c) La pente $m = -6 / c_2$ des courbes de niveau de z doit être égale à la pente du segment BC :

$$\frac{-6}{c_2} = \text{pente de BC} = \frac{11-6}{12-7} = 1$$

Ainsi, $c_2 = -6$.



Région admissible de MOG3-06



Région admissible de MOG3-07

7. Modification d'un membre droit et solution optimale.

(a) La région admissible de ce modèle linéaire est le polygone ABC de la figure ci-dessus (voir page précédente).

(b) L'unique solution optimale est alors le sommet B = (3; 2). Et $z = 17$.

(c) La région admissible du modèle modifié (P') est le polygone AB'HC. L'unique solution optimale de (P') est le sommet B' = (3,6; 2,4); et $z = 20,4$.

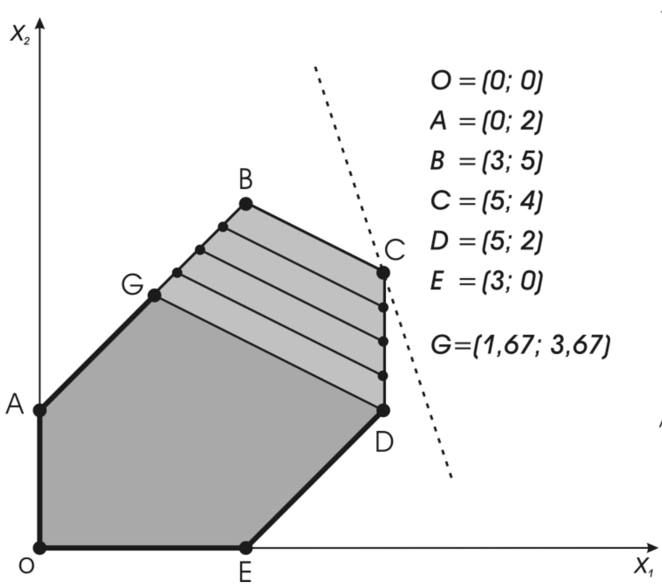
(d) L'unique solution optimale de (P) est alors le sommet C = (5; 0). Et $z = 20$.

(e) Cette fois encore, la région admissible du modèle modifié (P') est le polygone AB'HC. L'unique solution optimale de (P') est le sommet H = (5; 1); et $z = 23$.

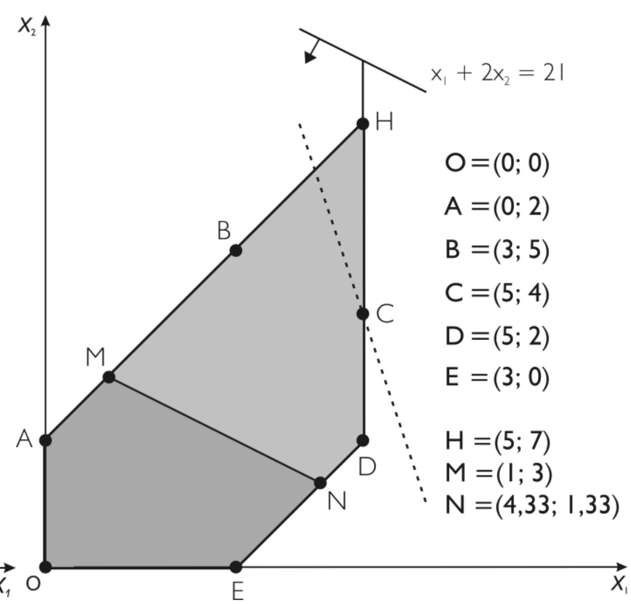
8. Variations d'un membre droit.

(a) La figure de gauche ci-dessous décrit graphiquement le problème traité ici. La région admissible du modèle linéaire est le polygone OABCDE quand $b_1 = 13$, et OAGDE quand $b_1 = 9$. La solution optimale est atteinte au sommet C dans le premier cas, et au sommet D dans le second.

Les segments de droite parallèles à BC indiquent comment se déplace la frontière de la région admissible lorsque b_1 augmente de 9 à 12 par pas de 1, le segment GD correspondant au cas où $b_1 = 9$.



Région admissible de MOG3-08ab



Région admissible de MOG3-08cd

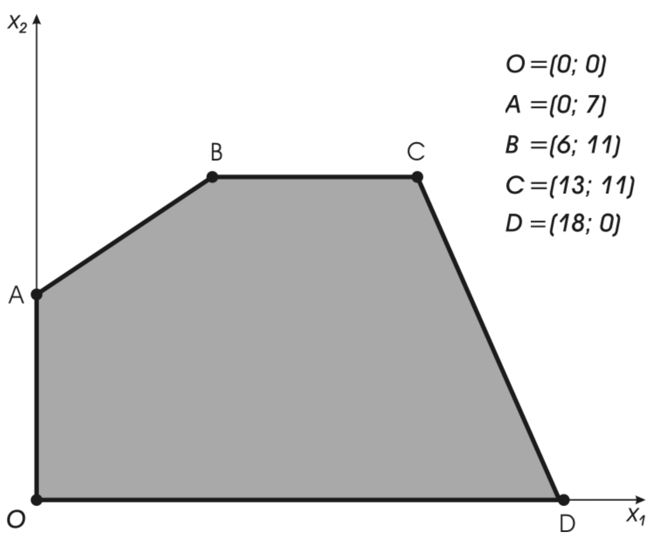
(b) Lorsque $b_1 = 9$, la valeur optimale est atteinte en D et vaut 17. Quand b_1 augmente par pas de 1, la solution optimale se déplace sur le segment DC : la première coordonnée reste constante à 5, tandis que la seconde coordonnée augmente par pas de 0,5. La valeur optimale de $z = 3x_1 + x_2$ augmente donc de 0,5 à chaque pas.

(c) La figure de droite ci-dessus (voir page précédente) décrit graphiquement le problème traité ici. Lorsque $b_1 = 21$, la région admissible est le polygone OAHDE, où H = (5; 7). Noter que l'inéquation « $x_1 + 2x_2 \leq 21$ » est redondante en présence des trois autres contraintes technologiques et des contraintes de non-négativité; que la région admissible admet alors 5 sommets seulement et n'a plus la même forme qu'à la question (a). Enfin, la valeur optimale est atteinte en H et est égale à 22.

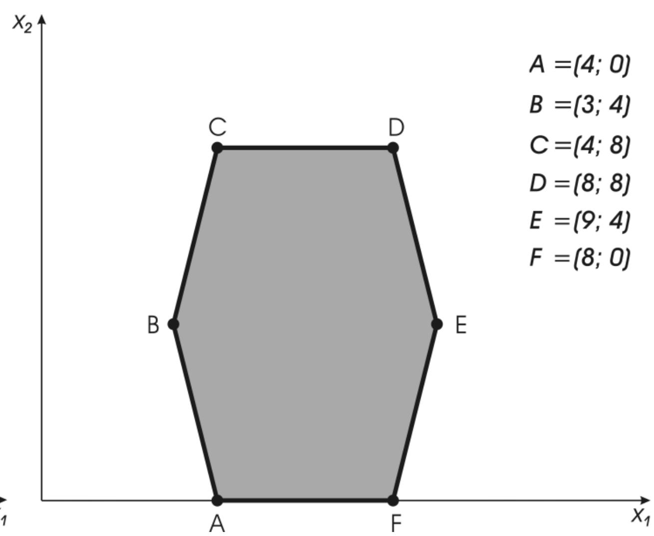
(d) La figure de droite ci-dessus décrit graphiquement le problème traité ici. Lorsque $b_1 = 7$, la région admissible est le polygone OAMNE, où M = (1; 3) et N = (4,33; 1,33). Noter que l'inéquation « $x_1 \leq 5$ » est alors redondante; que la région admissible admet 5 sommets seulement et n'a plus la même forme qu'à la question (a). Enfin, la valeur optimale est atteinte en N et est égale à 14,33.

9. Recherche graphique d’un maximum.

Les figures ci-dessous donnent, pour chacun des quatre modèles, sa région admissible, ainsi que les sommets ou points extrêmes de cette région. La solution optimale du modèle est indiquée à la suite de la figure correspondante.



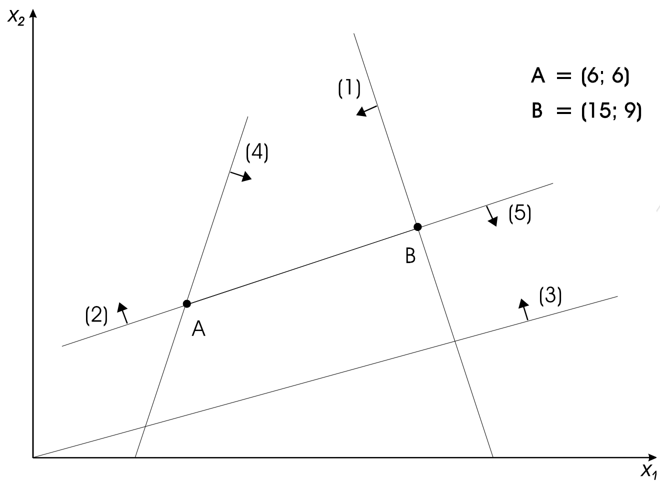
Région admissible de MOG3-09a



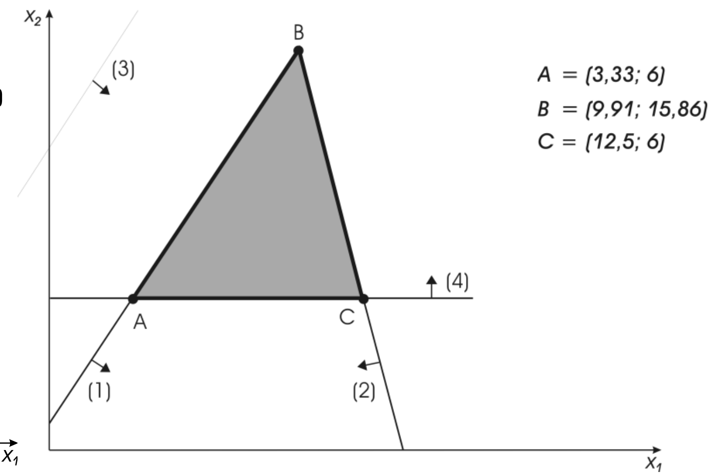
Région admissible de MOG3-09b

(a) L'unique solution optimale correspond au point extrême C = (13; 11).

(b) L'unique solution optimale correspond au point extrême C = (4; 8).



Région admissible de MOG3-09c



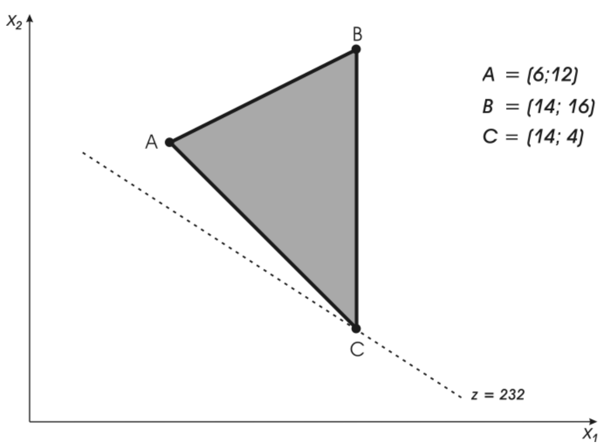
Région admissible de MOG3-09d

(c) La région admissible est le segment de droite reliant les points A = (6; 6) et B = (15; 9). L'unique solution optimale correspond au point extrême A = (6; 6).

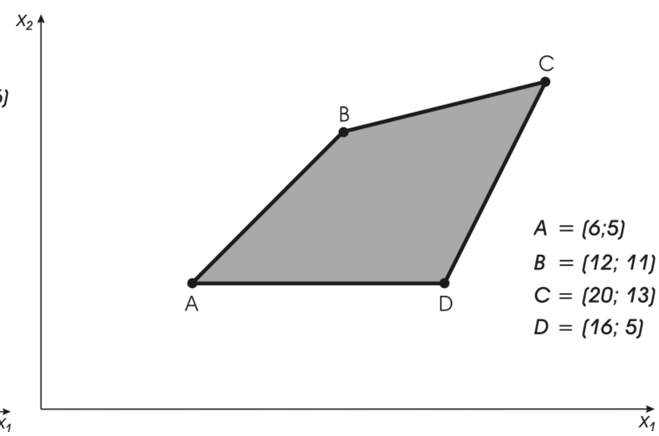
(d) L'unique solution optimale correspond au point extrême C = (12,5; 6)

10. Recherche graphique d'un minimum.

Les figures ci-dessous donnent, pour chacun des quatre modèles, sa région admissible, ainsi que les sommets ou points extrêmes de cette région. La solution optimale du modèle est indiquée à la suite de la figure correspondante.



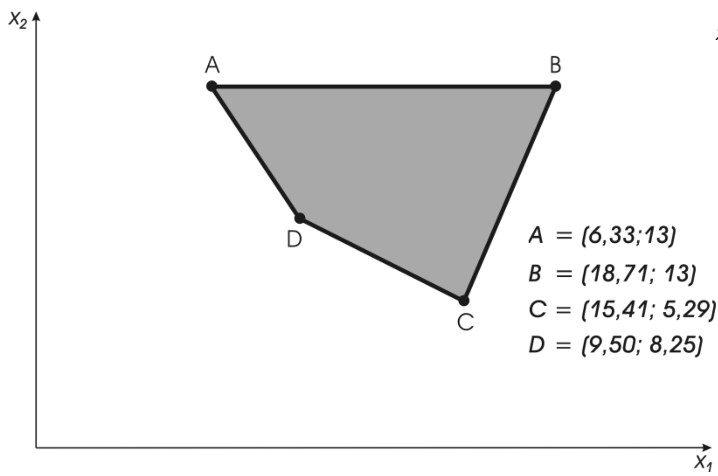
Région admissible de MOG3-10a

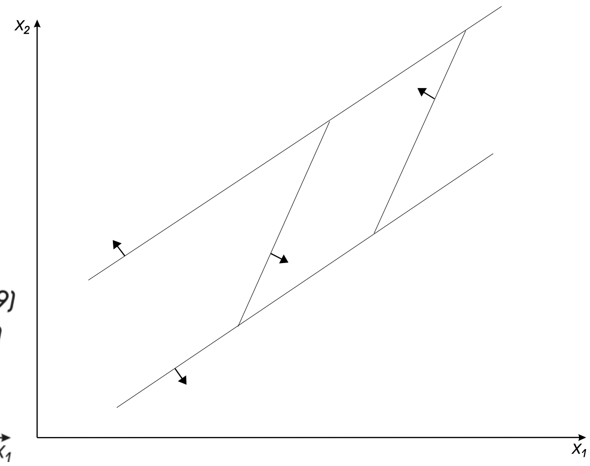


Région admissible de MOG3-10b

(a) L'unique solution optimale correspond au point extrême C = (14; 4).

(b) L'unique solution optimale correspond au point extrême D = (16; 5).





Région admissible de MOG3-10c **Région admissible de MOG3-10d**

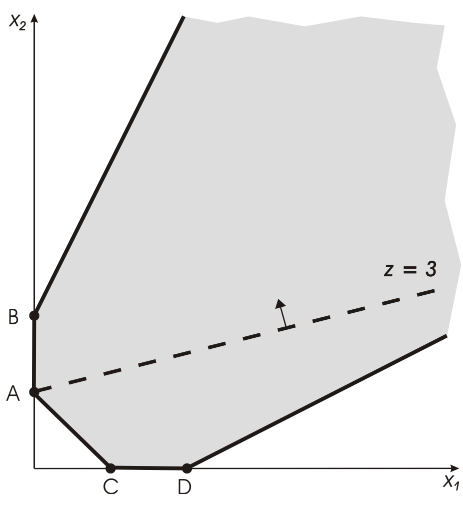
(c) Ce modèle linéaire admet une infinité de solutions optimales : tous les points du segment BC, en incluant les extrémités B et C, donnent à z la valeur minimale de – 460.

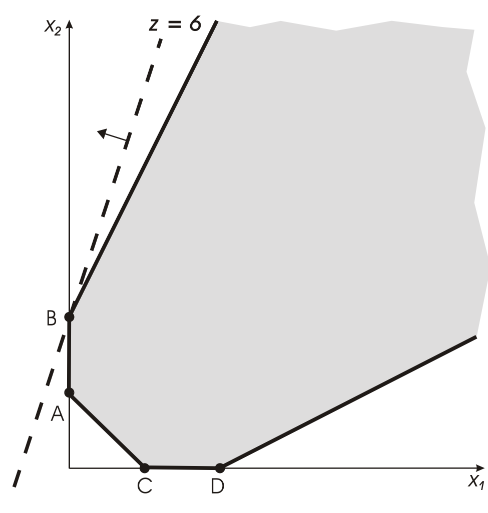
(d) La région admissible de ce modèle linéaire est vide.

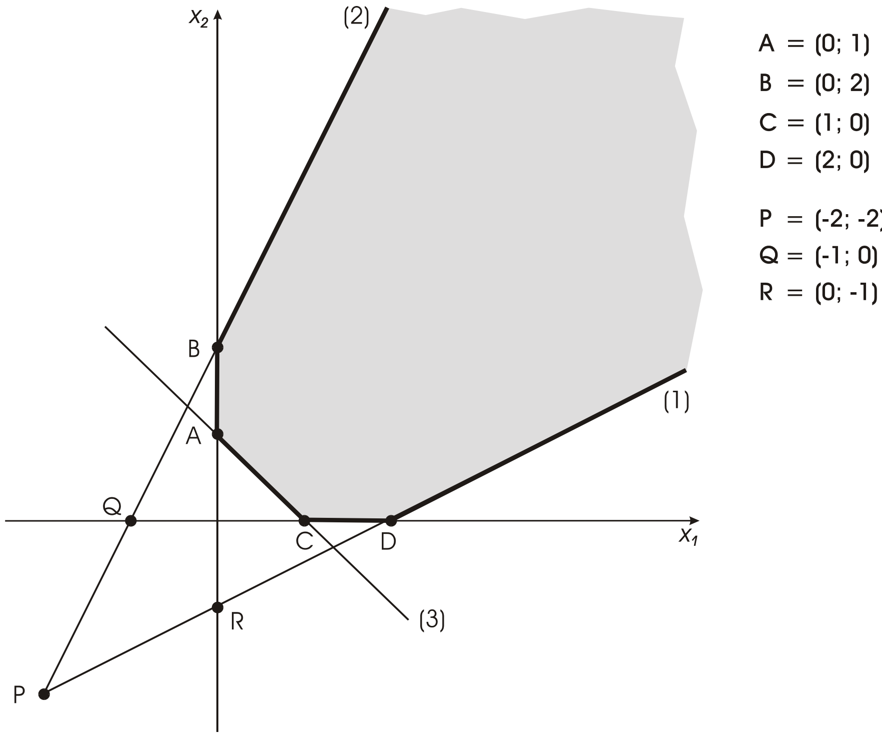
11. Condition d'optimalité sur un coefficient c_j.

(a) La région admissible est illustrée dans la figure reproduite au haut de la page suivante. Les sommets de cette région admissible sont les points A = (0; 1), B = (0; 2), C = (1; 0) et D = (2; 0).

(b) La figure de gauche ci-dessous donne la courbe de niveau $z = 3$, ainsi que la direction de croissance de z. On constate aisément que z peut augmenter autant que l'on veut dans la région admissible. Par conséquent, le modèle (P) n'est pas borné et n'admet pas de solution optimale quand $c_1 = -1$.







(c) L'étudiant a tort, car une valeur négative de c_1 fait diminuer la valeur de z pour les points dont la 1re coordonnée n'est pas nulle, ce qui augmente indirectement l'intérêt relatif du point (0; 2). Comme nous le verrons à la question (d), il suffit de donner à c_1 une valeur suffisamment négative pour que (0; 2) devienne optimal.

(d) Pour que le sommet (0; 2) soit un point optimal de (P), il suffit que la pente de la fonction-objectif soit supérieure ou égale à la pente de la droite associée à la 2e contrainte technologique (voir la figure de droite de la page précédente). Par conséquent, il suffit que

$$\frac{-c_1}{3} \geq \frac{-(-2)}{1}$$

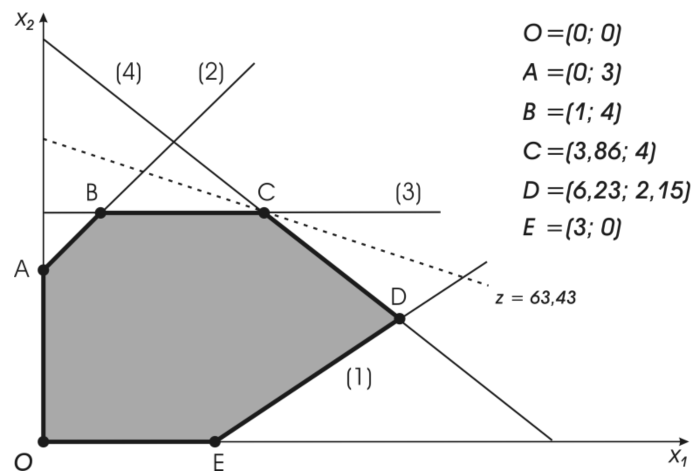
c'est-à-dire que $c_1 \leq -6$.

12. Sommets de la région admissible et pivotages.

(a) Le tableau suivant indique la droite associée à chacune des contraintes de la figure.

Contrainte	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Droite associée	*c*	*b*	*d*	*f*	*a*	*e*

(b) L'ensemble des solutions admissibles du système (1) - (6) est la région ombrée de la figure ci-contre. Cet ensemble contient 6 solutions de base, qui correspondent aux 6 points extrêmes O, A, B, C, D, E de la figure.



(c) Sous forme d'équations, les contraintes (1) - (4) s'écrivent :

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
2\,x_1 & -\;3\,x_2 & +\;e_1 & & & & =\;6 \\
-\,3\,x_1 & +\;3\,x_2 & & +\;e_2 & & & =\;9 \\
 & x_2 & & & +\;e_3 & & =\;4 \\
7\,x_1 & +\;9\,x_2 & & & & +\;e_4 & =\;63.
\end{array}
$$

Au point (6; 1), les variables d'écart prennent les valeurs suivantes :

$$e_1 = -3 \quad \text{et} \quad e_2 = 24 \quad \text{et} \quad e_3 = 3 \quad \text{et} \quad e_4 = 12.$$

(d) Comme l'illustre la figure ci-dessus, l'unique solution optimale correspond au point C :

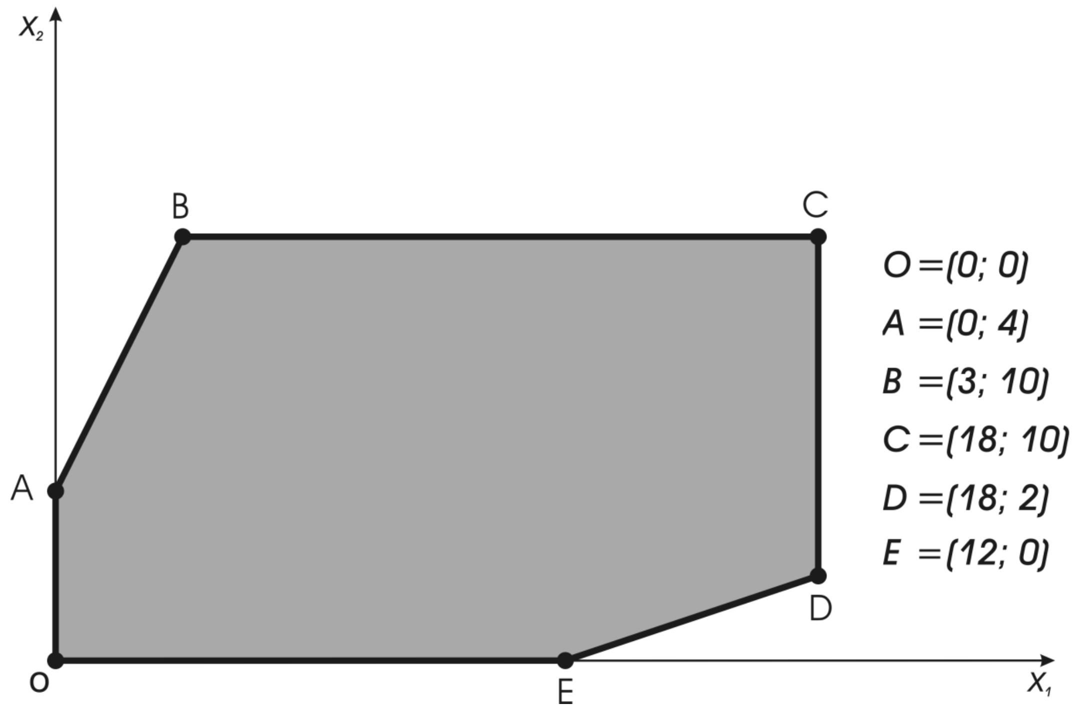
$$x_1 = 3{,}86 \quad \text{et} \quad x_2 = 4 \quad \text{et} \quad z = 63{,}43.$$

(e) Le lexique numéro 0 correspond au point O. Puisque le coefficient de x_2 dans la fonction-objectif est plus élevé que celui de x_1, la première itération fera entrer x_2 dans la base. Dès lors, on peut donner la séquence des points extrêmes rencontrés par la méthode du simplexe : O, A, B et C. Le tableau suivant résume les différentes itérations qui seront effectuées.

Lexique n°	**Point extrême**	**Variable entrante**	**Variable sortante**
0	O	x_2	e_2
1	A	x_1	e_3
2	B	e_2	e_4
3	C	Le lexique est optimal	

13. Région admissible et variables d'écart.

(a) La région admissible du modèle linéaire est le polygone OABCDE de la figure ci-dessous.



(b) Voici le lexique n° 0.

Max $z = 0 - 3\,x_1 + 7\,x_2$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} e_1 &= 4 + 2\,x_1 - x_2 \\ e_2 &= 12 - x_1 + 3\,x_2 \\ e_3 &= 10 - x_2 \\ e_4 &= 18 - x_1 \\ x_1,\ x_2,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

(c) Le tableau suivant donne les valeurs des variables d'écart en chacun des sommets. La section de droite indique quelles contraintes sont satisfaites comme équations (un numéro renvoie à une contrainte technologique; une variable, à la contrainte de non-négativité correspondante).

Sommet	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	Contraintes	
O	0	0	4	12	10	18	x_1	x_2
A	0	4	0	24	6	18	x_1	(1)
B	3	10	0	39	0	15	(1)	(3)
C	18	10	30	24	0	0	(3)	(4)
D	18	2	38	0	8	0	(4)	(2)
E	12	0	28	0	10	6	(2)	x_2

(d) Le tableau ci-dessous donne les valeurs des variables d'écart en chacun des 4 points considérés. La section de droite indique si le point est admissible ou non; et, dans le cas négatif, les contraintes qui ne sont pas satisfaites sont énumérées.

Point	e_1	e_2	e_3	e_4	Admissible ?
P	12	18	6	12	Oui
Q	– 13	73	– 11	16	Non : (1) et (3)
R	0	34	2	16	Oui
S	38	10	4	– 2	Non : (4)

(e) La variable entrante est x_2. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base, sous l'hypothèse que l'autre variable hors base, x_1, reste nulle :

$e_1 \geq 0$: $x_2 \leq 4 / 1 = 4$

$e_2 \geq 0$: aucune limite, car e_2 augmente quand x_2 augmente et $x_1 = 0$

$e_3 \geq 0$: $x_2 \leq 10 / 1 = 10$

$e_4 \geq 0$: aucune limite, car e_4 est toujours égale à 18 quand $x_1 = 0$.

Par conséquent, la variable sortante est e_1.

(f) Il suffit de calculer les valeurs de la fonction-objectif z et des variables de base du lexique n° 0 quand x_2 prend sa valeur limite 4 et x_1 reste nulle :

$$z = 0 - (3 \times 0) + (7 \times 4) = 28$$

$$e_1 = 4 + (2 \times 0) - (1 \times 4) = 0$$

$$e_2 = 12 - (1 \times 0) + (3 \times 4) = 24.$$

De même, $e_3 = 6$ et $e_4 = 18$. La solution de base résultant de l'itération correspond au sommet A. Noter qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer le pivotage pour répondre à la question.

14. Variables d'écart.

(a) Voici le lexique n° 0.

Max $z = 0 + x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4$

sous les contraintes :

$$e_1 = 60 - 2\,x_1 - 4\,x_2 - 7\,x_3 - 2\,x_4$$
$$e_2 = 40 - x_1 - x_2 - 2\,x_3 - 5\,x_4$$
$$e_3 = 50 - 3\,x_1 - 2\,x_2 - x_3 - 2\,x_4$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ e_1,\ e_2,\ e_3 \geq 0.$$

Et voici la solution de base associée :

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \quad \text{et} \quad e_1 = 60 \quad \text{et} \quad e_2 = 40 \quad \text{et} \quad e_3 = 50.$$

(b) Le tableau suivant donne les valeurs des variables d'écart en chacun des points considérés. La section de droite indique si le point est admissible ou non; et, dans le cas négatif, les contraintes qui ne sont pas satisfaites sont énumérées.

Point	e_1	e_2	e_3	Admissible ?
P	45	31	42	Oui
Q	– 16	18	28	Non : (1)
R	– 41	0	6	Non : (1)

(c) La variable entrante est x_4. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base, sous l'hypothèse que les autres variables hors base, x_1, x_2 et x_3, restent nulles :

$$e_1 \geq 0 :\ x_4 \leq 60 / 2 = 30$$
$$e_2 \geq 0 :\ x_4 \leq 40 / 5 = 8$$
$$e_3 \geq 0 :\ x_2 \leq 50 / 2 = 25.$$

Par conséquent, la variable sortante est e_2.

(d) Il suffit de calculer les valeurs de la fonction-objectif z et des variables de base du lexique n° 0 quand x_4 prend sa valeur limite 8 et que x_1, x_2 et x_3 restent nulles :

$$z = 0 + (1 \times 0) + (2 \times 0) + (3 \times 0) + (4 \times 8) = 32$$
$$e_1 = 60 - (2 \times 0) - (4 \times 0) - (7 \times 0) - (2 \times 8) = 44.$$

De même, $e_2 = 0$ et $e_3 = 34$. Noter qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer le pivotage pour répondre à la question.

15. Variables d'écart et fonction-objectif à minimiser.

(a) Le lexique demandé est le même que celui donné en réponse à la question (a) du problème précédent, sauf que l'objectif s'écrit maintenant :

$$\text{Min } z = 0 + 5\,x_1 - 7\,x_2 - 21\,x_3 + 13\,x_4.$$

La solution de base associée est la même.

(b) Les valeurs des variables d'écart et d'excédent sont les mêmes que dans la réponse à la question (b) du problème précédent. Le point P est admissible, mais ni Q, ni R ne le sont.

(c) La variable entrante est x_3. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base, sous l'hypothèse que les autres variables hors base, x_1, x_2 et x_4, restent nulles :

$$e_1 \geq 0 : x_3 \leq 60 / 7 = 8{,}571$$

$$e_2 \geq 0 : x_3 \leq 40 / 2 = 20$$

$$e_3 \geq 0 : x_3 \leq 50 / 1 = 50.$$

Par conséquent, la variable sortante est e_1.

(d) Il suffit de calculer les valeurs de la fonction-objectif z et des variables de base du lexique n° 0 quand x_3 prend sa valeur limite 60 / 7 et que x_1, x_2 et x_4 restent nulles :

$$\begin{aligned} z &= 0 + (5 \times 0) - (7 \times 0) - (21 \times 60/7) + (13 \times 0) = 180 \\ e_1 &= 60 - (2 \times 0) - (4 \times 0) - (7 \times 60/7) - (2 \times 0) = 0 \\ e_2 &= 40 - (1 \times 0) - (1 \times 0) - (2 \times 60/7) - (5 \times 0) = 22{,}857. \end{aligned}$$

De même, $e_3 = 41{,}429$. Noter qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer le pivotage pour répondre à la question.

16. Liste des sommets visités par l'algorithme du simplexe.

(a) Le tableau qui suit donne les valeurs de la fonction-objectif z en chacun des sommets de la région admissible. On constate que l'unique solution optimale correspond au sommet B.

Sommet	O = (0; 0)	A = (0; 4)	B = (4; 4)	C = (6; 2)	D = (6; 0)
Valeur de z	0	24	36	30	18

La solution de base associée est :

$$x_1 = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = 4 \quad \text{et} \quad e_1 = 4 - 4 = 0 \quad \text{et} \quad e_2 = 8 - 4 - 4 = 0 \quad \text{et} \quad e_3 = 6 - 4 = 2.$$

(b) Voici le lexique n° 0.

$$\text{Max } z = 0 + 3\,x_1 + 6\,x_2$$

sous les contraintes :

$$e_1 = 4 \quad\quad - x_2$$
$$e_2 = 8 - x_1 - x_2$$
$$e_3 = 8 - x_1$$
$$x_1,\ x_2,\ e_1,\ e_2,\ e_3 \ \geq\ 0.$$

Et voici la solution de base associée :

$$x_1 = x_2 = 0 \quad \text{et} \quad e_1 = 4 \quad \text{et} \quad e_2 = 8 \quad \text{et} \quad e_3 = 6.$$

(c) Lors de la 1re itération, x_2 est la variable entrante; par conséquent, on se déplacera à partir de l'origine O le long de l'axe vertical et la solution de base résultante correspondra nécessairement au sommet A. La séquence des points visités est donc O – A – B.

La 1re itération s'interprète géométriquement comme le passage de l'origine O (où $z = 0$) au sommet A (où $z = 24$) ; la fonction-objectif z augmente donc de 24. De même, la 2e et dernière itération nous amène de A à B (où $z = 36$) ; ainsi, z augmente de 36 – 24 = 12.

(d) La 2e itération nous amène de A à B, avons-nous indiqué à la question précédente. La variable x_1 est nulle et hors base dans la solution de base associée au sommet initial A, tandis qu'elle prend une valeur positive en B, ce qui implique que x_1 est variable de base dans la solution résultant de la 2e itération. Ainsi, x_1 est la variable entrante de la 2e itération.

Comme la fonction-objectif z augmente de 12 lors de cette itération et que la variable entrante x_1 passe de 0 à 4, l'augmentation marginale de x_1 dans le 1er lexique est égale à 12 / 4 = 3.

(e) Les variables hors base du 2e lexique sont les deux variables nulles au sommet B, soit e_1 et e_2. Augmenter e_1 tout en laissant e_2 nulle correspond à un déplacement le long du segment de droite [B; C]. L'augmentation marginale de e_1 dans le 2e lexique est donc égale à $(30-36)/(2-0) = -3$, où le numérateur est la variation de z entre les extrémités B et C du segment et le dénominateur, celle de la variable e_1. De même, l'augmentation marginale de e_2 est liée au passage de B à A et elle est égale à $(24-36)/(4-0) = -3$.

17. Une itération d'un modèle de maximisation.

(a) Voici la solution de base associée au lexique de l'énoncé.

$$x_1 = x_3 = e_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_4 = 21 \quad \text{et} \quad e_2 = 6 \quad \text{et} \quad x_2 = 12 \quad \text{et} \quad e_4 = 30.$$

Pour cette solution, la fonction-objectif z prend la valeur 189.

(b) La variable entrante est x_3. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base, sous l'hypothèse que les autres variables hors base, x_1 et e_3, restent nulles :

$x_4 \geq 0$: aucune limite, car x_4 est toujours égale à 21 quand $x_1 = e_3 = 0$

$e_2 \geq 0$: aucune limite, car e_2 augmente quand x_3 augmente et $x_1 = e_3 = 0$

$x_2 \geq 0$: aucune limite, car x_2 est toujours égale à 12 quand $x_1 = e_3 = 0$

$e_4 \geq 0$: $x_3 \leq 30 / 5 = 6$.

Par conséquent, la valeur limite de la variable entrante x_3 est 6 et la variable sortante est e_4. Il reste à effectuer le pivotage. D'abord, l'équation associée au pivot (la dernière) permet d'isoler la variable entrante x_3 en fonction des variables hors base du prochain lexique :

$$x_3 = (30 + 5\,x_1 - 2{,}5\,e_3 - e_4\,) / 5 = 6 + x_1 - 0{,}5\,e_3 - 0{,}2\,e_4.$$

On calcule ensuite les équations du prochain lexique :

$$z = 189 - 10\,x_1 + 8\,(6 + x_1 - 0{,}5\,e_3 - 0{,}2\,e_4) + 3{,}5\,e_3 = 237 - 2\,x_1 - 0{,}5\,e_3 - 1{,}6\,e_4$$

$$e_2 = 6 - 3\,x_1 + (6 + x_1 - 0{,}5\,e_3 - 0{,}2\,e_4) + e_3 = 12 - 2\,x_1 + 0{,}5\,e_3 - 0{,}2\,e_4.$$

Voici le lexique résultant (les équations impliquant x_4 et x_2 ne sont pas modifiées, car la variable entrante x_3 n'y apparaît pas) :

Max $z = 237 - 2\,x_1 - 0{,}5\,e_3 - 1{,}6\,e_4$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned}
x_4 &= 21 - x_1 \\
e_2 &= 12 - 2\,x_1 + 0{,}5\,e_3 - 0{,}2\,e_4 \\
x_2 &= 12 - x_1 + 0{,}5\,e_3 \\
x_3 &= 6 + x_1 - 0{,}5\,e_3 - 0{,}2\,e_4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ e_2,\ e_3,\ e_4 \geq 0.
\end{aligned}$$

(c) À la suite de cette itération, z augmente de $8 \times 6 = 48$. Voici la solution de base associée au lexique résultant.

$$x_1 = e_3 = e_4 = 0 \quad \text{et} \quad x_4 = 21 \quad \text{et} \quad e_2 = 12 \quad \text{et} \quad x_2 = 12 \quad \text{et} \quad x_3 = 6.$$

(d) Cette dernière solution est optimale car on cherche ici à maximiser z et, dans le lexique de la question (b), les coûts marginaux des variables hors base sont tous négatifs.

18. Une itération d'un modèle de minimisation.

(a) Voici la solution de base associée au lexique de l'énoncé.

$$x_2 = e_2 = 0 \quad \text{et} \quad e_1 = 60 \quad \text{et} \quad x_4 = 12 \quad \text{et} \quad x_3 = 12 \quad \text{et} \quad x_1 = 24.$$

Pour cette solution, la fonction-objectif z prend la valeur 168.

(b) La variable entrante est x_2. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base, sous l'hypothèse que l'autre variable hors base, e_2, reste nulle :

$e_1 \geq 0$: $x_2 \leq 60 / 1 = 60$

$x_4 \geq 0$: $x_2 \leq 12 / 1 = 12$

$x_3 \geq 0$: aucune limite, car x_3 est toujours égale à 12 quand $e_2 = 0$

$x_1 \geq 0$: aucune limite, car x_1 est toujours égale à 24 quand $e_2 = 0$.

Par conséquent, la valeur limite de la variable entrante x_2 est 12 et la variable sortante est x_4. Il reste à effectuer le pivotage. D'abord, l'équation associée au pivot permet d'isoler la variable entrante x_2 en fonction des variables hors base du prochain lexique :

$$x_2 = 12 - x_4 + 0{,}625\, e_2.$$

On calcule ensuite les équations du prochain lexique :

$$z = 168 - (12 - x_4 + 0{,}625\, e_2) + 1{,}25\, e_2 = 156 + x_4 + 0{,}625\, e_2$$

$$e_1 = 60 - (12 - x_4 + 0{,}625\, e_2) - e_2 = 48 + x_4 - 1{,}625\, e_2.$$

Voici le lexique résultant (les équations impliquant x_3 et x_1 ne sont pas modifiées, car la variable entrante x_2 n'y apparaît pas) :

Min $z = 156 + x_4 + 0{,}625\, e_2$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned}
e_1 &= 48 + x_4 - 1{,}625\, e_2 \\
x_2 &= 12 - x_4 + 0{,}625\, e_2 \\
x_3 &= 12 \phantom{{}- x_4} - 0{,}125\, e_2 \\
x_1 &= 24 \phantom{{}- x_4} + 0{,}500\, e_2 \\
&x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ e_1,\ e_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

(c) À la suite de cette itération, z diminue de $1 \times 12 = 12$. Voici la solution de base associée au lexique résultant.

$$x_4 = e_2 = 0 \quad \text{et} \quad e_1 = 48 \quad \text{et} \quad x_2 = 12 \quad \text{et} \quad x_3 = 12 \quad \text{et} \quad x_1 = 24.$$

(d) Cette dernière solution est optimale car on cherche ici à minimiser z et, dans le lexique de la question (b), les coûts marginaux des variables hors base sont tous positifs.

19. Calcul de la solution de base résultant d'une itération.

(a) La variable entrante est x_3. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base, sous l'hypothèse que les autres variables hors base, x_2 et e_3, restent nulles :

$e_1 \geq 0 : x_3 \leq 12 / 0{,}5 = 24$

$e_2 \geq 0 : x_3 \leq 96 / 5 = 19{,}2$

$x_1 \geq 0 : x_3 \leq 12 / 0{,}5 = 24$

$e_4 \geq 0 : x_3 \leq 10 / 1 = 10.$

Par conséquent, la valeur limite de la variable entrante x_3 est 10 et la variable sortante est e_4. Il reste à calculer les valeurs de la fonction-objectif z et des variables de base du lexique résultant quand x_3 prend sa valeur limite 10 et que x_2 et e_3 restent nulles :

$$z = 84 - (1{,}5 \times 0) + (0{,}5 \times 10) - (3{,}5 \times 0) = 89$$
$$e_1 = 12 - (0{,}5 \times 0) - (0{,}5 \times 10) + (0{,}5 \times 0) = 7$$
$$e_2 = 96 - (6 \times 0) - (5 \times 10) + (1 \times 0) = 46.$$

De même, $x_1 = 7$ et $e_4 = 0$. La solution de base résultant de l'itération est donc :

$$x_2 = e_2 = e_4 = 0 \quad \text{et} \quad e_1 = 7 \quad \text{et} \quad e_2 = 46 \quad \text{et} \quad x_1 = 7 \quad \text{et} \quad x_3 = 10.$$

(b) La variable entrante est x_1. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base, sous l'hypothèse que les autres variables hors base, e_2 et e_3, restent nulles :

$e_1 \geq 0 : x_1 \leq 200 / 5 = 40$

$e_4 \geq 0$: aucune limite, car e_4 est toujours égale à 10 quand $e_2 = e_3 = 0$

$x_2 \geq 0 : x_1 \leq 20 / 1 = 20$

$x_3 \geq 0$: aucune limite, car x_3 augmente quand x_1 augmente et $e_2 = e_3 = 0$.

Par conséquent, la valeur limite de la variable entrante x_1 est 20 et la variable sortante est x_2. Il reste à calculer les valeurs de la fonction-objectif z et des variables de base du lexique résultant quand x_1 prend sa valeur limite 20 et que x_2 et e_3 restent nulles :

$$z = 560 + (28 \times 20) - (16 \times 0) - (68 \times 0) = 1120$$
$$e_1 = 200 - (5 \times 20) + (3 \times 0) + (10 \times 0) = 100.$$

De même, $x_2 = 0$ et $x_3 = 30$; enfin, la valeur de la variable de base e_4 n'est pas modifiée, car la variable entrante x_1 n'apparaît pas dans l'équation correspondante. La solution de base résultant de l'itération est donc :

$$x_2 = e_2 = e_3 = 0 \quad \text{et} \quad e_1 = 100 \quad \text{et} \quad e_4 = 10 \quad \text{et} \quad x_1 = 20 \quad \text{et} \quad x_3 = 30.$$

(c) La variable entrante est x_2. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base, sous l'hypothèse que les autres variables hors base, x_3, e_3 et e_4 restent nulles :

$e_1 \geq 0$: $x_2 \leq 220 / 5 = 44$

$e_2 \geq 0$: $x_2 \leq 40 / 5 = 8$

$x_1 \geq 0$: aucune limite, car x_1 est toujours égale à 20 quand $x_3 = e_3 = e_4 = 0$

$x_4 \geq 0$: aucune limite, car x_4 est toujours égale à 20 quand $x_3 = e_3 = e_4 = 0$.

Par conséquent, la valeur limite de la variable entrante x_2 est 8 et la variable sortante est e_2. Il reste à calculer les valeurs de la fonction-objectif z et des variables de base du lexique résultant quand x_2 prend sa valeur limite 8 et que x_3, e_3 et e_4 restent nulles :

$$z = 1040 + (35 \times 8) - (9 \times 0) + (20 \times 0) - (52 \times 0) = 1320$$

$$e_1 = 220 - (5 \times 8) - (2 \times 0) + (7 \times 0) = 180.$$

De même, $e_2 = 0$; enfin, les valeurs des variables de base x_1 et x_4 ne sont pas modifiées, car la variable entrante x_2 n'apparaît pas dans les équations correspondantes. La solution de base résultant de l'itération est donc :

$$x_3 = e_2 = e_3 = e_4 = 0 \quad \text{et} \quad e_1 = 100 \quad \text{et} \quad x_2 = 8 \quad \text{et} \quad x_1 = 20 \quad \text{et} \quad x_4 = 20.$$

(d) La variable entrante est x_4. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base, sous l'hypothèse que les autres variables hors base, x_2, x_5 et e_4, restent nulles :

$e_1 \geq 0$: $x_4 \leq 320 / 3 = 106{,}667$

$e_2 \geq 0$: $x_4 \leq 40 / 3 = 13{,}333$

$x_3 \geq 0$: aucune limite, car x_3 est toujours égale à 0 quand $x_2 = x_5 = e_4 = 0$

$x_1 \geq 0$: $x_4 \leq 20 / 1 = 20$.

Par conséquent, la valeur limite de la variable entrante x_4 est 13,333 et la variable sortante est e_2. Il reste à calculer les valeurs de la fonction-objectif z et des variables de base du lexique résultant quand x_4 prend sa valeur limite 13,333 et que x_2, x_5 et e_4 restent nulles :

$$z = 960 + (44 \times 0) - (10 \times 13{,}333) - (6 \times 0) + (48 \times 0) = 1093{,}333$$

$$e_1 = 320 - (5{,}5 \times 0) - (3 \times 13{,}333) + (1 \times 0) - (2 \times 0) = 360.$$

De même, $e_2 = 0$; enfin, les valeurs des variables de base x_3 et x_1 ne sont pas modifiées, car la variable entrante x_4 n'apparaît pas dans les équations correspondantes. La solution de base résultant de l'itération est donc :

$$x_2 = x_5 = e_2 = e_4 = 0 \quad \text{et} \quad e_1 = 360 \quad \text{et} \quad x_4 = 13{,}333 \quad \text{et} \quad x_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = 20.$$

20. Résolution par l'algorithme du simplexe d'un modèle à 3 variables de décision.

Voici le lexique n° 0.

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 0 + 3\,x_1 + x_2 + 7\,x_3 \\
&\text{sous les contraintes :} \\
&\quad e_1 = 3 - x_1 - x_2 - x_3 \\
&\quad e_2 = 6 - 2\,x_1 - 2\,x_2 - 3\,x_3 \\
&\quad e_3 = 8 - x_1 - 4\,x_2 - 2\,x_3 \\
&\quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ e_1,\ e_2,\ e_3 \ \geq\ 0.
\end{aligned}$$

1re itération. La variable entrante est x_3. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base, sous l'hypothèse que les autres variables hors base, x_1 et x_2, restent nulles :

$$\begin{aligned}
e_1 &\geq 0 : \ x_3 \leq 3 / 1 = 3 \\
e_2 &\geq 0 : \ x_3 \leq 6 / 3 = 2 \\
e_3 &\geq 0 : \ x_3 \leq 8 / 2 = 4.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la valeur limite de la variable entrante x_3 est 2 et la variable sortante est e_2. Il reste à effectuer le pivotage. D'abord, l'équation associée au pivot (la 2e) permet d'isoler la variable entrante x_3 en fonction des variables hors base du prochain lexique :

$$x_3 = (6 - 2\,x_1 - 2\,x_2 - e_2) / 3 = 2 - 0{,}67\,x_1 - 0{,}67\,x_2 - 0{,}33\,e_2.$$

On calcule ensuite les équations du prochain lexique :

$$z = 0 + 3\,x_1 + x_2 + 7\,(2 - 0{,}67\,x_1 - 0{,}67\,x_2 - 0{,}33\,e_2) = 14 - 1{,}67\,x_1 - 3{,}67\,x_2 - 2{,}33\,e_2$$

$$e_1 = 3 - x_1 - x_2 - (2 - 0{,}67\,x_1 - 0{,}67\,x_2 - 0{,}33\,e_2) = 1 - 0{,}33\,x_1 - 0{,}33\,x_2 + 0{,}33\,e_2.$$

On calcule de même les deux autres équations. Voici le lexique résultant :

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 14 - 1{,}67\,x_1 - 3{,}67\,x_2 - 2{,}33\,e_2 \\
&\text{sous les contraintes :} \\
&\quad e_1 = 1 - 0{,}33\,x_1 - 0{,}33\,x_2 + 0{,}33\,e_2 \\
&\quad x_3 = 2 - 0{,}67\,x_1 - 0{,}67\,x_2 - 0{,}33\,e_2 \\
&\quad e_3 = 4 + 0{,}33\,x_1 - 2{,}67\,x_2 + 0{,}67\,e_2 \\
&\quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ e_1,\ e_2,\ e_3 \ \geq\ 0.
\end{aligned}$$

Comme les valeurs marginales de toutes les variables hors base sont nulles dans ce lexique, la solution de base associée est optimale. Ainsi, la valeur maximale de z est 14 et l'on obtient cette valeur en posant : $x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 = 2$.

21. Un modèle continu à deux variables de décision.

(a) La région admissible est le segment [C ; F]. Voici trois solutions admissibles de ce modèle :

$$C = (6; 3) \quad \text{et} \quad F = (8; 6) \quad \text{et} \quad P = ½\,C + ½\,F = (7; 4{,}5).$$

(b) La solution optimale est F = (8; 6). En ce point, $z = (6 \times 8) + (4 \times 6) = 72$.

(c) Voici la solution de base associée au lexique :

$$e_4 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 = 3 \quad \text{et} \quad x_1 = 6 \quad \text{et} \quad e_3 = 4 \quad \text{et} \quad e_1 = 0.$$

Cette solution correspond au sommet C. En ce point, la fonction-objectif z vaut 48.

(d) Le lexique n'est pas optimal, car l'amélioration marginale de la variable hors base e_4 est positive et l'on cherche à maximiser z. La variable entrante est e_4. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base :

$x_2 \geq 0$: aucune limite, car x_2 augmente quand e_4 augmente

$x_1 \geq 0$: aucune limite, car x_1 augmente quand e_4 augmente

$e_3 \geq 0$: $e_4 \leq 4 / 2 = 2$

$e_1 \geq 0$: aucune limite, car e_1 augmente quand e_4 augmente.

Par conséquent, la valeur limite de la variable entrante e_4 est 2 et la variable sortante est e_3. Le pivot est le coefficient -2,0 de la variable entrante e_4 dans l'équation associée à la variable sortante e_3. Il reste à calculer les valeurs des variables de base du lexique quand e_4 prend sa valeur limite 2. Par exemple,

$$x_2 = 3 + (1{,}5 \times 2) = 6.$$

Voici donc la solution de base associée au lexique résultant de l'itération :

$$e_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 = 6 \quad \text{et} \quad x_1 = 8 \quad \text{et} \quad e_4 = 2 \quad \text{et} \quad e_1 = 4.$$

22. La gamme de produits associée à une solution optimale.

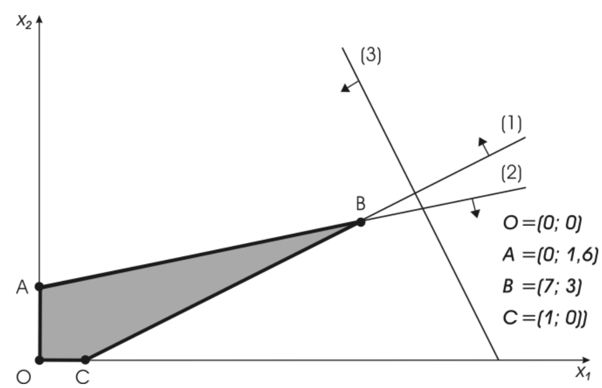
Un modèle linéaire traduisant ce problème comporterait 10 variables de décision indiquant combien d'unités fabriquer de chaque produit, ainsi que 4 contraintes technologiques de signe ≤ pour tenir compte du temps disponible en main-d'oeuvre dans les ateliers. Les lexiques de ce modèle contiendraient donc 14 variables en tout, soit 4 variables d'écart et les 10 variables de décision; et les solutions de base compteraient 4 variables de base et 10 variables hors base. Si on résoud un tel modèle par l'algorithme du simplexe, au maximum 4 des 10 variables de décision pourraient se retrouver dans la base du lexique optimal. On pourrait dès lors être tenté de conclure qu'au maximum 4 des 10 produits seront fabriqués dans toute solution optimale. En fait, cela est vrai lorsque le modèle possède une seule solution optimale.

Par contre, on peut obtenir une solution optimale où il est indiqué de fabriquer 6 des 10 produits dans le cas suivant :

- les 4 variables de base du lexique final fourni par l'algorithme du simplexe sont des variables de décision originales du modèle;
- de plus, deux des 10 variables de décision originales se trouvent hors base dans le lexique optimal, admettent une amélioration marginale nulle et leurs valeurs limites en tant que variables entrantes potentielles sont positives.

23. Résolution graphique et itérations.

(a) La région admissible du modèle (P) est le polygone OABC de la figure ci-contre. Noter que la 3^e contrainte technologique est redondante en présence des autres contraintes du modèle.



(b) L'unique solution optimale du modèle (P) est le sommet B = (7; 3). En ce point, la fonction-objectif z prend la valeur 37 :

$z = (4 \times 7) + (3 \times 3) = 37.$

(c) La variable entrante est x_1 ; et e_1 est la variable sortante. La soluton de base associée au lexique résultant correspond au sommet C = (1; 0).

(d) Deux itérations : de O à C, puis de C à B.

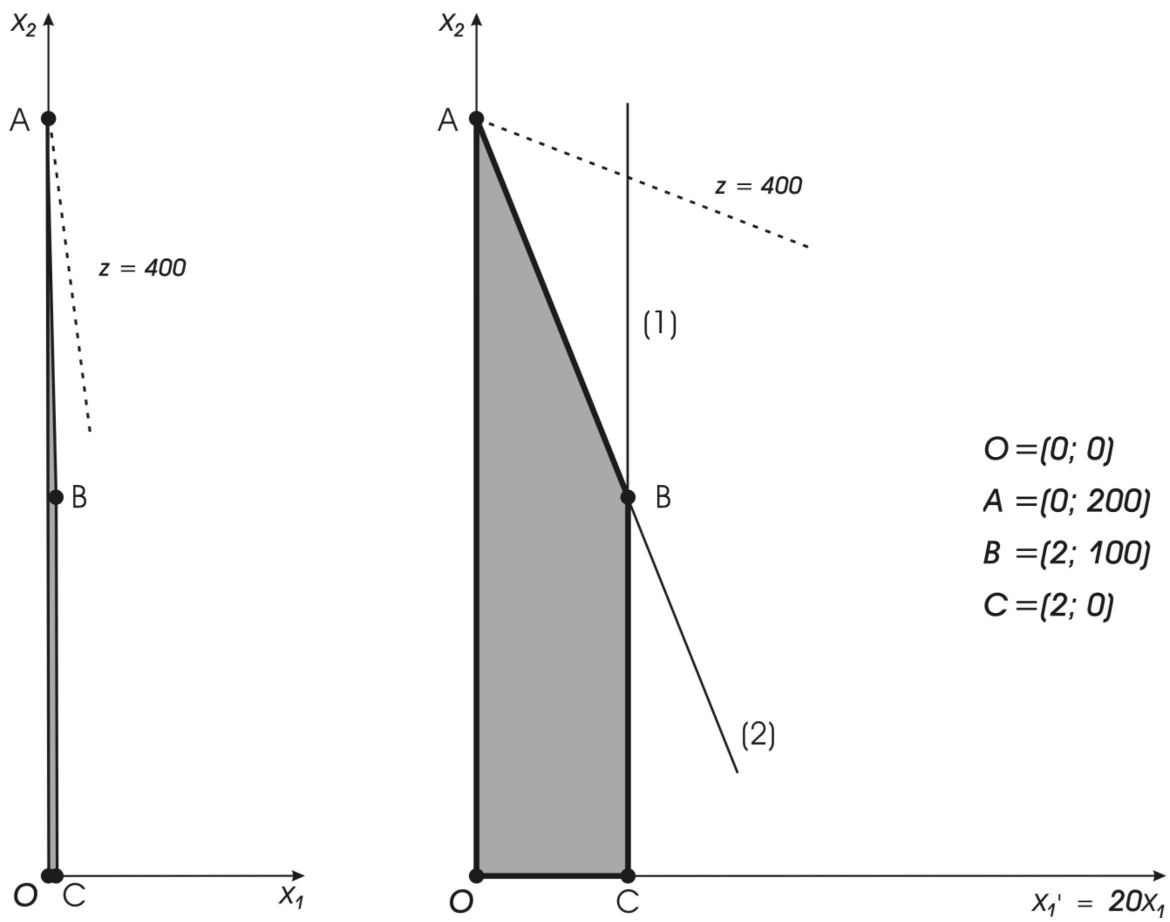
(e) Le lexique final correspond au sommet B = (7; 3), qui est l'intersection des droites associées au contraintes (1) et (2). Par conséquent, les variables e_1 et e_2 sont hors base dans ce lexique et les variables de base sont : $x_1 = 7$ et $x_2 = 3$ et $e_3 = 20 - (2\,x_1 + x_2) = 3$.

(f) Oui (voir le tableau ci-dessous).

Sommet	O = (0; 0)	A = (0; 1,6)	B = (7; 3)	C = (1; 0)
Valeur de z'	0	3,2	30	3

24. Modèles dont tous les sommets sont visités.

(a) La figure ci-dessous illustre la résolution graphique de ce modèle : le graphique de gauche, dont les deux axes sont à la même échelle, ne permet pas de bien distinguer la forme de la région admissible OABC, car la distance entre O et A dépasse de beaucoup celle entre O et C; dans le graphique de droite, l'axe horizontal a été amplifié par un facteur de 20 et la forme polygonale de OABC devient visible. L'unique solution optimale du modèle correspond au point A, où $z = 400$.



(b) Voici le lexique n° 0 (la solution de base associée correspond au sommet O).

$$\text{Max } z = 0 + 30\,x_1 + 2\,x_2$$

sous les contraintes :

$$e_1 = 2 - x_1$$

$$e_2 = 200 - 50\,x_1 - x_2$$

$$x_1,\ x_2,\ e_1,\ e_2 \geq 0.$$

1^re^ itération. La variable entrante est x_1 ; et e_1 est la variable sortante. Voici le lexique n° 1 (la solution de base associée correspond au sommet C).

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 60 + 2\,x_2 - 30\,e_1 \\ \text{sous les contraintes :} & \\ x_1 &= 2 - e_1 \\ e_2 &= 100 - x_2 + 50\,e_1 \\ x_1,\ x_2,\ e_1,\ e_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

2^re^ itération. La variable entrante est x_2 ; et e_2 est la variable sortante. Voici le lexique n° 2 (la solution de base associée correspond au sommet B).

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 260 + 70\,e_1 - 2\,e_2 \\ \text{sous les contraintes :} & \\ x_1 &= 2 - e_1 \\ x_2 &= 100 + 50\,e_1 - e_2 \\ x_1,\ x_2,\ e_1,\ e_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

3^re^ itération. La variable entrante est e_1 ; et x_1 est la variable sortante. Voici le lexique n° 3 (la solution de base associée correspond au sommet A).

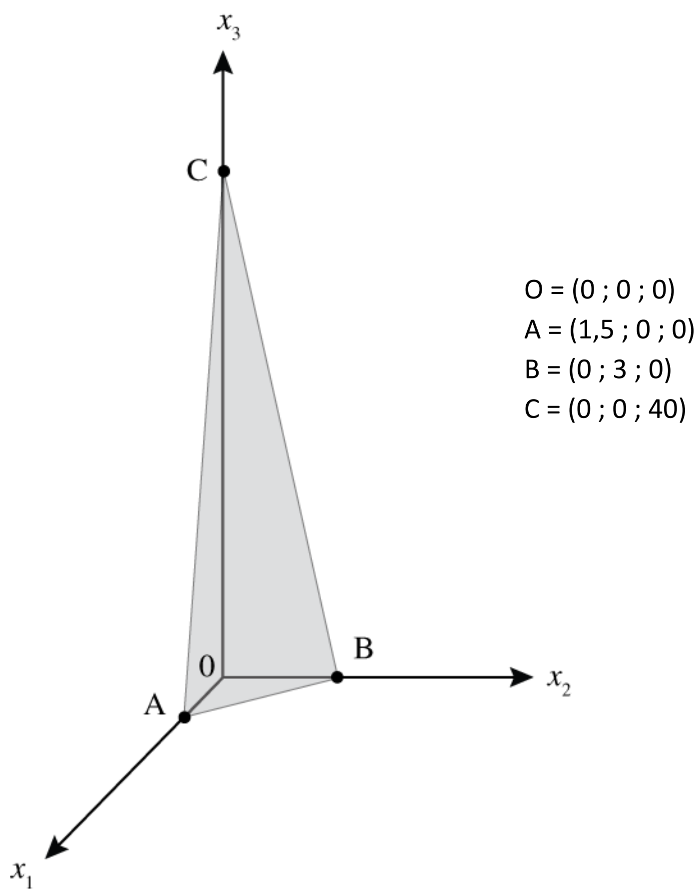
$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 400 - 70\,x_1 - 2\,e_2 \\ \text{sous les contraintes :} & \\ e_1 &= 2 - x_1 \\ x_2 &= 200 - 50\,x_1 - e_2 \\ x_1,\ x_2,\ e_1,\ e_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

(c) Le modèle suivant constitue un exemple simple de modèle linéaire présentant toutes les caractéristiques exigées dans l'énoncé.

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = 20\,x_1 + 11\,x_2 + x_3 \\ &\text{sous les contraintes :} \\ &\qquad 40\,x_1 + 20\,x_2 + 1{,}5\,x_3 \leq 60 \\ &\qquad x_1 , x_2 , x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

La figure ci-dessous (voir page suivante) illustre la résolution graphique de ce modèle. Noter que l'axe x_3 a été diminué par un facteur de 3 afin de maintenir la figure à une taille raisonnable. Comme le montre le tableau qui suit, l'unique solution optimale du modèle correspond au sommet C = (0; 0; 40), où $z = 40$.

Sommet	O = (0; 0; 0)	A = (1,5; 0; 0)	B = (0; 3; 0)	C = (0; 0; 40)
Valeur de z	0	30	33	40



La résolution de ce modèle par l'algorithme du simplexe prend 3 itérations quand on choisit la variable entrante selon le critère MAM.

Voici le lexique n° 0 (la solution de base associée correspond au sommet O).

$$\text{Max } z = 0 + 20\,x_1 + 11\,x_2 + x_3$$

sous les contraintes :

$$e_1 = 60 - 40\,x_1 - 20\,x_2 - 1{,}5\,x_3$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ e_1 \geq 0.$$

1re itération. La variable entrante est x_1 ; et e_1 est la variable sortante. Voici le lexique n° 1 (la solution de base associée correspond au sommet A).

$$\text{Max } z = 30 + x_2 + 0{,}2500\,x_3 - 0{,}500\,e_1$$

sous les contraintes :

$$x_1 = 1{,}5 - 0{,}5\,x_2 - 0{,}0375\,x_3 - 0{,}025\,e_1$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ e_1 \geq 0.$$

2e itération. La variable entrante est x_2 ; et x_1 est la variable sortante. Voici le lexique n° 2 (la solution de base associée correspond au sommet B).

$$\text{Max } z = 33 - 2\,x_1 + 0{,}175\,x_3 - 0{,}55\,e_1$$

sous les contraintes :

$$x_2 = 3 - 2\ x_1 - 0{,}075\ x_3 - 0{,}05\ e_1$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ e_1 \ \geq\ 0.$$

3e itération. La variable entrante est x_3 ; et x_2 est la variable sortante. Voici le lexique no 3 (la solution de base associée correspond au sommet C).

$$\text{Max } z = 40 - 6{,}667\ x_1 - 2{,}333\ x_2 - 0{,}667\ e_1$$

sous les contraintes :

$$x_3 = 40 - 26{,}667\ x_1 - 13{,}333\ x_2 - 0{,}667\ e_1$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ e_1 \ \geq\ 0.$$

25. Changement de fonction-objectif.

(a) Calculons d'abord la fonction-objectif z_1 en fonction des variables hors base du lexique de l'énoncé.

$$\begin{aligned} z_1 &= (x_1 + x_7) + (x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10}) \\ &= \quad 120 - \tfrac{2}{3}\, x_2 - \tfrac{2}{3}\, x_3 + \ldots + 0\, x_{10} + \tfrac{1}{3}\, e_1 + 0\, e_3 \\ &\quad + 180 + 0\, x_2 - 2\, x_3 + \ldots - 6\, x_{10} + 0\, e_1 + 1\, e_3 \\ &\quad + 0 + 1\, x_2 + 1\, x_3 + \ldots + 1\, x_{10} \\ &= \quad 300 + \tfrac{1}{3}\, x_2 - 1\tfrac{2}{3}\, x_3 + \ldots - 5\, x_{10} + \tfrac{1}{3}\, e_1 + 1\, e_3. \end{aligned}$$

Voici la liste des améliorations marginales pour z_1 des variables hors base du lexique.

Variable	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_8	x_9	x_{10}	e_1	e_3
Amélioration marginale	0,333	–1,667	0,667	–1,333	–3,333	–1	–3	–5	0,333	1

(b) La solution de base associée au lexique n'est pas optimale pour z_1 car les améliorations marginales de plusieurs variables hors base sont négatives et l'on cherche à minimiser z_1.

(c) La variable entrante est x_{10}. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base, sous l'hypothèse que les autres variables hors base restent nulles :

$x_1 \geq 0$: aucune limite, car x_1 est égale à 120 quelle que soit la valeur de x_{10}

$e_2 \geq 0$: $x_{10} \leq 360 / 18 = 20$

$x_7 \geq 0$: $x_{10} \leq 180 / 6 = 30.$

Par conséquent, la valeur limite de la variable entrante x_{10} est 20 et la variable sortante est e_2. Le pivot est le coefficient -12 de la variable entrante x_{10} dans l'équation associée à la variable sortante e_2. Il reste à calculer les valeurs de la fonction-objectif z_1 et des variables de base du lexique quand x_{10} prend sa valeur limite 20 :

$$z_1 = 300 - (5 \times 20) = 200$$

$$x_1 = 120 + (0 \times 20) = 120$$

$$e_2 = 360 - (18 \times 20) = 0$$

$$x_7 = 180 - (6 \times 20) = 60.$$

Voici la solution de base associée au lexique résultant de l'itération :

$$x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_8 = x_9 = e_3 = e_3 = e_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = 120 \quad \text{et} \quad x_7 = 60 \quad \text{et} \quad x_{10} = 20.$$