9B Le critère de regret attendu minimal

Un décideur qui applique un critère pessimiste se voit parfois incité à changer de stratégie lorsqu'il exprime les résultats conditionnels en termes de regrets, plutôt qu'en termes de profits ou de coûts. Le problème de MicroSolutions en est un exemple, comme le montrent les tableaux 9.1 et 9.2. Par contre, pour un décideur qui retient le critère de Bayes et dont le problème de décision se traduit par un tableau de résultats de la forme considérée dans les sections 9.3 et 9.4 (voir, par exemple, le tableau 9.2, ou encore la figure 9.12, plage A9:G13), l'option qui optimise la valeur espérée est la même, que les résultats conditionnels soient mesurés en termes monétaires ou en termes de regrets. Nous démontrons maintenant cette affirmation dans le cas où il s'agit de comparer les critères de profit espéré et de regret attendu.

Le contexte – Notations

Nous adopterons les conventions et notations suivantes.

- L'arbre se limite à deux niveaux et débute par un point de décision offrant I options, notées $S_1, S_2, \dots, S_I$.
- Chacune de ces branches comporte un nœud de J événements, notés $E_1, E_2, \dots, E_J$.
- La probabilité de l'événement E_j est notée p_j.
- À la branche $S_i - E_j$ est associé un résultat conditionnel r_{ij}, qui mesure le profit et est exprimé en unités monétaires.

En résumé, le tableau des résultats conditionnels se présente sous la forme symétrique suivante déjà utilisée en section 9.3 pour analyser les critères non probabilistes.

Option	Événements			
	E_1	E_2	…	E_J
S_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1J}
S_2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2J}
…	…	…	…	…
S_I	r_{I1}	r_{I2}	…	r_{IJ}

Théorème 1. ***Les critères de profit espéré et de regret attendu sont équivalents.***

Preuve. Convenons de noter m_j le meilleur résultat associé à l'événement E_j :

$$m_j \;=\; \max\{r_{1j}, r_{2j}, \ldots, r_{Ij}\}.$$

Par définition, le regret correspondant à la combinaison $S_i - E_j$ est égal à la différence $m_j - r_{ij}$. Le regret attendu découlant de l'option S_i se calcule donc ainsi :

$$\mathrm{E}[\text{Regret} \mid S_i\,] \;=\; \Sigma_j\; p_j\,(m_j - r_{ij}) \;=\; \left(\Sigma_j\; p_j\, m_j\right) - \left(\Sigma_j\; p_j\, r_{ij}\right).$$

Or, le 1er terme de cette dernière expression est le profit espéré en certitude, tandis que le second est le profit espéré lorsque l'option S_i est retenue. Par conséquent,

$$\mathrm{E}[\text{Regret} \mid S_i\,] \;=\; \text{PEC} - \mathrm{E}[\text{Profit} \mid S_i\,].$$

Ainsi, l'option S_i qui maximise le profit espéré est celle qui minimise le regret attendu. $\blacksquare$

Théorème 2. ***La valeur espérée d'une information parfaite est égale au regret attendu minimal.***

Preuve.

$$\begin{aligned}
\text{VEIP} &= \text{PEC} \;-\; \max_i \mathrm{E}[\text{Profit} \mid S_i\,] && \text{définition de VEIP}\\
&= \text{PEC} \;+\; \min_i \left(- \mathrm{E}[\text{Profit} \mid S_i\,]\right) &&\\
&= \min_i \left(\text{PEC} - \mathrm{E}[\text{Profit} \mid S_i\,]\right) &&\\
&= \min_i \mathrm{E}[\text{Regret} \mid S_i\,] && \text{voir calculs du théorème 1}\\
&= \text{Regret attendu minimal.} \;\blacksquare &&
\end{aligned}$$

Remarque. Le critère consistant à minimiser le coût attendu est également équivalent au critère de regret attendu. Il est facile d'adapter les preuves des théorèmes 1 et 2 à ce contexte.