6A Convexité de l'ensemble *EVO-C* des valeurs des objectifs

6A.1 Vecteur des valeurs des objectifs et combinaisons linéaires convexes. Un exemple

Commençons par un exemple numérique. Nous reprenons le modèle de *Leurres Magiques* et nous considérerons la combinaison linéaire convexe P = 0,7 B + 0,3 C des sommets B et C (voir annexe 3F pour la définition de combinaison linéaire convexe). Calculons d'abord les coordonnées de ce point P :

$$\mathrm{P} \;=\; 0{,}7\begin{bmatrix}0\\20\end{bmatrix} + 0{,}3\begin{bmatrix}10\\30\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}0\\14\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}3\\23\end{bmatrix}.$$

Si le plan de production P = (3; 23) est implanté, le revenu z_1 de *Leurres Magiques* sera de 7200 $ par mois, et le profit z_2 de 870 $ par mois :

$$z_1(\mathrm{P}) \;=\; (100 \times 3) + (300 \times 23) \;=\; 300 + 6900 \;=\; 7200$$

$$z_2(\mathrm{P}) \;=\; (60 \times 3) + (30 \times 23) \;=\; 180 + 690 \;=\; 870.$$

En résumé, le vecteur $\boldsymbol{z}_\mathrm{P}$ des valeurs des deux objectifs z_1 et z_2 évalués au point P s'écrit :

$$\boldsymbol{z}_\mathrm{P} \;=\; \begin{bmatrix}7\,200\\870\end{bmatrix}.$$

Nous allons vérifier que ce vecteur $\boldsymbol{z}_\mathrm{P}$ s'exprime comme combinaison linéaire convexe des vecteurs $\boldsymbol{z}_\mathrm{B}$ et $\boldsymbol{z}_\mathrm{C}$, avec les mêmes poids 0,7 et 0,3. Rappelons (voir tableau 6.2) que le revenu mensuel en B et en C est de 6000 $ et de 10 000 $ respectivement, tandis que le profit pour ces deux points s'élève à 600 $ et à 1500 $ respectivement : ainsi,

$$\boldsymbol{z}_\mathrm{B} \;=\; \begin{bmatrix}6\,000\\600\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{z}_\mathrm{C} \;=\; \begin{bmatrix}10\,000\\1\,500\end{bmatrix}.$$

Calculons la combinaison linéaire convexe 0,7 $\boldsymbol{z}_\mathrm{B}$ + 0,3 $\boldsymbol{z}_\mathrm{C}$ de ces deux vecteurs :

$$0{,}7\begin{bmatrix}6\,000\\600\end{bmatrix} + 0{,}3\begin{bmatrix}10\,000\\1\,500\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}4\,200\\420\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\,000\\450\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}7\,200\\870\end{bmatrix}.$$

On constate que, pour cet exemple,

$$\mathrm{P} = 0{,}7\,\mathrm{B} + 0{,}3\,\mathrm{C} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{z}_\mathrm{P} = 0{,}7\,\boldsymbol{z}_\mathrm{B} + 0{,}3\,\boldsymbol{z}_\mathrm{C}.$$

6A.2 Vecteur des valeurs des objectifs et combinaisons linéaires convexes. Le cas général

Nous montrons maintenant que ce résultat est général, c'est-à-dire que si

$$\mathrm{R} \;=\; \lambda\,\mathrm{P} + (1 - \lambda)\,\mathrm{Q}, \qquad (1)$$

où P et Q sont des solutions admissibles, alors

$$\mathbf{z}_R \;=\; \lambda\, \mathbf{z}_P + (1-\lambda)\, \mathbf{z}_Q. \tag{2}$$

En effet, posons :

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}.$$

La condition (1) signifie que

$$r_i \;=\; \lambda\, p_i + (1-\lambda)\, q_i \qquad\qquad i = 1, 2. \tag{3}$$

Évaluons les fonctions-objectifs au point R. Le revenu mensuel s'obtient ainsi :

$$\begin{aligned} z_1(\mathrm{R}) &= 100\, r_1 + 300\, r_2 \\ &= 100\, \big(\lambda\, p_1 + (1-\lambda)\, q_1\big) + 300\, \big(\lambda\, p_2 + (1-\lambda)\, q_2\big). \end{aligned}$$

Regroupant les termes autrement, on conclut que

$$z_1(\mathrm{R}) \;=\; \lambda\, (100\, p_1 + 300\, p_2) + (1-\lambda)\, (100\, q_1 + 300\, q_2).$$

De même,

$$\begin{aligned} z_1(\mathrm{R}) &= 60\, r_1 + 30\, r_2 \\ &= 60\, \big(\lambda\, p_1 + (1-\lambda)\, q_1\big) + 30\, \big(\lambda\, p_2 + (1-\lambda)\, q_2\big). \\ &= \lambda\, (60\, p_1 + 30\, p_2) + (1-\lambda)\, (60\, q_1 + 30\, q_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, le vecteur $\mathbf{z}_R$ se récrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_R &= \begin{bmatrix} z_1(\mathrm{R}) \\ z_2(\mathrm{R}) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 100p_1 + 300p_2 \\ 60p_1 + 30p_2 \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} 100q_1 + 300q_2 \\ 60q_1 + 30q_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} z_1(\mathrm{P}) \\ z_2(\mathrm{P}) \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} z_1(\mathrm{Q}) \\ z_2(\mathrm{Q}) \end{bmatrix} \\ &= \lambda\, \mathbf{z}_P + (1-\lambda)\, \mathbf{z}_Q. \end{aligned}$$

Le résultat (2) précédent se généralise à plus de deux points. En particulier, si

$$P \;=\; \lambda_a\, A + \lambda_b\, B + \ldots + \lambda_f\, F, \tag{4}$$

où les poids λ_a , λ_b , …, λ_f sont des nombres non négatifs dont la somme vaut 1, alors

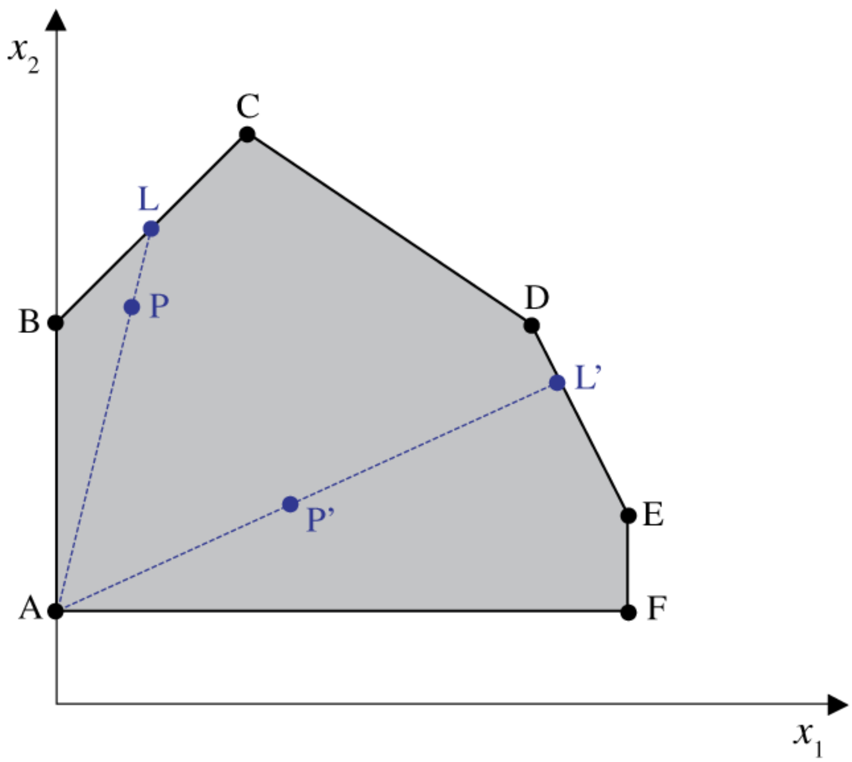
$$\mathbf{z}_P \;=\; \lambda_a\, \mathbf{z}_A + \lambda_b\, \mathbf{z}_B + \ldots + \lambda_f\, \mathbf{z}_F. \tag{5}$$

6A.3 Combinaisons linéaires convexes des sommets de *ADM-C*

Nous montrons maintenant que le polygone *ADM-C* représenté à la figure 6.1 est «engendré» par ses sommets, c'est-à-dire que toute solution admissible du modèle continu (1) - (6) de *Leurres Magiques* s'exprime comme une combinaison linéaire convexe de la forme (4) et, réciproquement, toute combinaison linéaire convexe de la forme (4) appartient à *ADM-C*.

La 2e partie de cette affirmation, la «réciproque», découle de la convexité de la région admissible de tout modèle linéaire continu (voir annexe 3F). Pour illustrer l'autre partie, nous traitons d'abord un exemple numérique. Notons d'abord que le point admissible P = (4; 21) de la figure ci-dessous s'écrit sous la forme de la combinaison linéaire convexe suivante :

$$P \;=\; {}^{1}\!/_{5}\,A + {}^{4}\!/_{5}\,(½\,B + ½\,C) \;=\; 0{,}2\;A + 0{,}4\;B + 0{,}4\;C.$$



En effet,

$$0{,}2\;A + 0{,}4\;B + 0{,}4\;C \;=\; 0{,}2\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix} + 0{,}4\begin{bmatrix}0\\20\end{bmatrix} + 0{,}4\begin{bmatrix}10\\30\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\12\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}4\\21\end{bmatrix} \;=\; P.$$

Ainsi, P s'exprime comme combinaison linéaire convexe des sommets du polygone *ADM-C* :

$$P \;=\; \lambda_a\,A + \lambda_b\,B + \ldots + \lambda_f\,F, \quad \text{où}\;\; \lambda_a = 0{,}2 \;\;\text{et}\;\; \lambda_b = \lambda_c = 0{,}4 \;\;\text{et}\;\; \lambda_d = \lambda_e = \lambda_f = 0.$$

Considérons maintenant un point admissible quelconque P′. Traçons la droite passant par A et P′, et notons L′ le point où cette droite rencontre la frontière de l'ensemble *ADM-C*. À titre d'illustration, nous traiterons ici du point P′ affiché dans la figure ci-dessus, mais le raisonnement s'appliquerait *mutatis mutandis* à tout autre point admissible. Dans la figure, le point de rencontre L′ est situé sur le segment reliant les sommets D et E. Il s'exprime donc comme combinaison linéaire convexe des extrémités de ce segment de droite :

$$L' \;=\; \lambda\,D + (1-\lambda)\,E, \qquad \text{où}\;\; 0 \le \lambda \le 1.$$

De plus, P′ appartient au segment de droite reliant A et L′ :

$$P' \; = \; \lambda' \, A + (1 - \lambda') \, L', \qquad \text{où} \;\; 0 \leq \lambda' \leq 1.$$

Combinant ces deux formules, on conclut que

$$P' \; = \; \lambda' \, A + (1 - \lambda') \, \boldsymbol{(} \, \lambda \, D + (1 - \lambda) \, E \, \boldsymbol{)}.$$

Il en résulte que P′ s'écrit comme la combinaison linéaire convexe suivante des sommets :

$$P' \; = \; \lambda_a \, A + \lambda_b \, B + \ldots + \lambda_f \, F,$$

où $\lambda_a = \lambda'$ et $\lambda_d = \lambda \, (1 - \lambda')$ et $\lambda_e = (1 - \lambda) \, (1 - \lambda')$ et $\lambda_b = \lambda_c = \lambda_f = 0$.

6A.4 Convexité de l'ensemble *EVO-C*

Tout est maintenant en place pour démontrer l'affirmation faite dans le manuel, à l'effet que l'ensemble *EVO-C* est le polygone «engendré» par les points extrêmes $\mathbf{z}_A$, , $\mathbf{z}_B$, …, $\mathbf{z}_F$. En effet, un point P = $(x_1; x_2)$ appartient à l'ensemble *ADM-C*

si et seulement si $P \; = \; \lambda_a \, A + \lambda_b \, B + \ldots + \lambda_f \, F$, où $\lambda_h \geq 0$ pour tout h et $\Sigma_h \, \lambda_h = 1$

si et seulement si $\mathbf{z}_P \; = \; \lambda_a \, \mathbf{z}_A + \; \lambda_b \, \mathbf{z}_B + \ldots + \; \lambda_f \, \mathbf{z}_F$, où $\lambda_h \geq 0$ pour tout h et $\Sigma_h \, \lambda_h = 1$

si et seulement si $\mathbf{z}_P$ appartient au polygone de sommets $\mathbf{z}_A$, $\mathbf{z}_B$, $\mathbf{z}_C$, $\mathbf{z}_D$, $\mathbf{z}_E$ et $\mathbf{z}_F$.