## 4B Le calcul d'une solution optimale d'un noeud-fils

Lors de l'application de la méthode SÉP, pour effectuer une séparation selon la variable $x$, on ajoute aux contraintes du noeud-père (P), sur l'une des branches, une contrainte de la forme

$$x \leq \lfloor \bar{x} \rfloor$$

et, sur l'autre, une contrainte de la forme

$$x \geq \lfloor \bar{x} \rfloor + 1,$$

où $\bar{x}$ dénote la valeur de $x$ dans la solution optimale proposée de (P) et où $\lfloor r \rfloor$ dénote le plus grand entier qui est $\leq r$. (Par exemple, $\lfloor 3{,}2 \rfloor = 3$ et $\lfloor 4 \rfloor = 4$.). Les modèles linéaires continus associés aux noeuds-fils (P') et (P'') diffèrent chacun de celui associé à (P) par une seule contrainte, que viole d'ailleurs la solution optimale proposée de (P). S'il fallait reprendre toutes les itérations de l'algorithme du simplexe pour trouver une solution optimale de (P'), puis faire de même pour déterminer une solution optimale de (P''), l'évolution de la méthode SÉP dans la suite des séparations à effectuer serait fort ralentie. Heureusement, il est possible d'utiliser le lexique optimal du noeud-père pour démarrer les calculs d'une solution optimale d'un noeud-fils. Illustrons comment procéder à l'aide de l'exemple suivant.

$$\text{Max } z = 4\,x_1 + 5\,x_2 + 9\,x_3 + 11\,x_4 \qquad (1)$$

sous les contraintes :

$$\text{(P)} \qquad \begin{aligned}
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + e_1 && (2)\\
& 7\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 + 2\,x_4 + e_2 && (3)\\
& 3\,x_1 + 5\,x_2 + 10\,x_3 + 15\,x_4 + e_3 && (4)\\
& x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , e_1 , e_2 , e_3 \geq 0 && (5)\\
& x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , e_1 , e_2 , e_3 \text{ entiers.} && (6)
\end{aligned}$$

Le modèle (1)-(5) est la relaxation continue de (P) et sera dénoté, comme d'habitude, ($P_0$). En voici le lexique optimal.

$$\text{Max } z = \tfrac{695}{7} - \tfrac{3}{7}x_2 - \tfrac{11}{7}x_4 - \tfrac{13}{7}e_1 - \tfrac{5}{7}e_3 \qquad (7)$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{50}{7} - \tfrac{5}{7}x_2 + \tfrac{5}{7}x_4 - \tfrac{10}{7}e_1 + \tfrac{1}{7}e_3 && (8)\\
e_2 &= \tfrac{325}{7} + \tfrac{6}{7}x_2 - \tfrac{13}{7}x_4 + \tfrac{61}{7}e_1 - \tfrac{4}{7}e_3 && (9)\\
x_3 &= \tfrac{55}{7} - \tfrac{2}{7}x_2 - \tfrac{12}{7}x_4 + \tfrac{3}{7}e_1 - \tfrac{1}{7}e_3 && (10)\\
& x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , e_1 , e_2 , e_3 \geq 0. && (11)
\end{aligned}$$

Comme la solution optimale de $(P_0)$ n'est pas entière, la méthode SÉP se poursuivra par une séparation. Si le critère du plus grand $c_j$ est retenu, la séparation s'effectuera selon $x_3$, créant deux modèles continus:

$(P_1)$ : $(P_0)$ auquel on adjoint la contrainte « $x_3 \leq 7$ »

$(P_2)$ : $(P_0)$ auquel on adjoint la contrainte « $x_3 \geq 8$ ».

L'inéquation « $x_3 \leq 7$ » est équivalente à l'ensemble des deux contraintes suivantes:

$$x_3 + e_4 = 7 \tag{12}$$

$$e_4 \geq 0 \tag{13}$$

où $e_4$ est une variable d'écart. L'inéquation (13) sera intégrée à la contrainte globale de non-négativité de l'ensemble des variables du modèle. Quant à l'équation (12), elle devra être adjointe aux contraintes technologiques de $(P_0)$. Mais auparavant, il faudra la transformer, car la variable de base $x_3$ ne peut apparaître dans une autre équation du lexique. Tout d'abord, on remplace $x_3$ par sa valeur telle que donnée dans (10) :

$$\left(\tfrac{55}{7} - \tfrac{2}{7}x_2 - \tfrac{12}{7}x_4 + \tfrac{3}{7}e_1 - \tfrac{1}{7}e_3\right) + e_4 = 7$$

$$e_4 = -\tfrac{6}{7} + \tfrac{2}{7}x_2 + \tfrac{12}{7}x_4 - \tfrac{3}{7}e_1 + \tfrac{1}{7}e_3. \tag{14}$$

La variable d'écart $e_4$ ne peut servir de variable de base pour (14) puisque la constante à la droite du signe d'égalité est négative. Pour sortir de cette impasse, on multiplie (14) par –1, puis on introduit une variable artificielle $a_4$, un truc déjà utilisé dans l'annexe 3A :

$$a_4 - e_4 = +\tfrac{6}{7} - \tfrac{2}{7}x_2 - \tfrac{12}{7}x_4 + \tfrac{3}{7}e_1 - \tfrac{1}{7}e_3$$

$$a_4 = \tfrac{6}{7} - \tfrac{2}{7}x_2 - \tfrac{12}{7}x_4 + \tfrac{3}{7}e_1 - \tfrac{1}{7}e_3 + e_4. \tag{15}$$

Comme dans l'annexe 3A, on procédera en deux phases. Lors de la première, on cherchera à minimiser la variable artificielle $a_4$. Techniquement, on considère le lexique suivant :

$$\text{Min } z_A = \tfrac{6}{7} - \tfrac{2}{7}x_2 - \tfrac{12}{7}x_4 + \tfrac{3}{7}e_1 - \tfrac{1}{7}e_3 + e_4 \tag{16}$$

sous les contraintes :

$$(P_A) \quad \begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{50}{7} - \tfrac{5}{7}x_2 + \tfrac{5}{7}x_4 - \tfrac{10}{7}e_1 + \tfrac{1}{7}e_3 && (8)\\
e_2 &= \tfrac{325}{7} + \tfrac{6}{7}x_2 - \tfrac{13}{7}x_4 + \tfrac{61}{7}e_1 - \tfrac{4}{7}e_3 && (9)\\
x_3 &= \tfrac{55}{7} - \tfrac{2}{7}x_2 - \tfrac{12}{7}x_4 + \tfrac{3}{7}e_1 - \tfrac{1}{7}e_3 && (10)\\
a_4 &= \tfrac{6}{7} - \tfrac{2}{7}x_2 - \tfrac{12}{7}x_4 + \tfrac{3}{7}e_1 - \tfrac{1}{7}e_3 + e_4 && (15)
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, e_1, e_2, e_3, e_4, a_4 \geq 0. \tag{17}$$

Si la valeur minimale de $z_A$ est positive, le modèle $(P_1)$ n'admet pas de solution admissible. Si elle est nulle, le lexique optimal de $(P_A)$ permet de construire un lexique initial de $(P_1)$.

Mais revenons à notre exemple. Puisqu'il s'agit ici de minimiser $z_A$, la variable entrante est $x_4$ et la variable sortante, $a_4$. On effectue l'opération de pivotage, obtenant le lexique suivant.

$$\text{Min } z_A = a_4 \tag{18}$$

sous les contraintes :

$$x_1 = 7{,}5 - \tfrac{5}{6}x_2 - \tfrac{5}{4}e_1 + \tfrac{1}{12}e_3 + \tfrac{5}{12}e_4 - \tfrac{5}{12}a_4 \tag{19}$$

$$e_2 = 45{,}5 + \tfrac{7}{6}x_2 + \tfrac{33}{4}e_1 - \tfrac{5}{12}e_3 - \tfrac{13}{12}e_4 + \tfrac{13}{12}a_4 \tag{20}$$

$$x_3 = 7 - e_4 + a_4 \tag{21}$$

$$x_4 = 0{,}5 - \tfrac{1}{6}x_2 + \tfrac{1}{4}e_1 - \tfrac{1}{12}e_3 + \tfrac{7}{12}e_4 - \tfrac{7}{12}a_4 \tag{22}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, e_1, e_2, e_3, e_4, a_4 \geq 0. \tag{23}$$

Ce lexique est optimal. On restaure maintenant la fonction-objectif initiale. Il suffit de remplacer dans (7) la variable $x_4$ par sa valeur dans (22) : après calculs, il résulte que

$$\text{Max } z = 98{,}5 - \tfrac{1}{6}x_2 - \tfrac{9}{4}e_1 - \tfrac{7}{12}e_3 - \tfrac{7}{12}e_4. \tag{24}$$

La phase 2 débute avec le lexique formé de l'objectif (24) et des contraintes (19) à (23) dont on enlève les termes associés à la variable artificielle $a_4$. Celle-ci s'arrête immédiatement puisque tous les coefficients de (24) sont non positifs. Par conséquent, (7,5; 0; 7; 0,5; 0; 45,5; 0; 0) est une solution optimale de ($P_1$).

Pour résoudre ce noeud-fils, il a suffi essentiellement d'effectuer un pivotage à partir du lexique optimal du noeud-père. Ce ne sera pas toujours aussi rapide, car la variable à sortir en premier de la base ne sera pas toujours la variable artificielle que l'on vient d'ajouter. En règle générale toutefois, pour calculer une solution optimale d'un noeud-fils, il sera plus rapide de procéder ainsi plutôt que de reprendre les calculs de l'algorithme du simplexe à partir de leur début.

La solution optimale de (P2) se trouve de façon analogue. La contrainte

$$x_3 \geq 8 \tag{25}$$

se réécrit:

$$x_3 - e_4 = 8 \quad \text{et} \quad e_4 \geq 0. \tag{26}$$

Après quelques manipulations algébriques, on obtient:

$$a_4 = \tfrac{1}{7} + \tfrac{2}{7}x_2 + \tfrac{12}{7}x_4 - \tfrac{3}{7}e_1 + \tfrac{1}{7}e_3 + e_4 \tag{27}$$

où $a_4$ est une variable artificielle. On procède alors comme précédemment. La solution optimale de ($P_2$) s'obtient cette fois encore en un seul pivotage