3A La méthode en deux phases

3A.1 Contraintes technologiques de signe ≥ ou = et lexique initial

Dans la description de l'algorithme du simplexe donnée à la section 3.3.6, nous avons indiqué qu'il est facile de construire le lexique initial d'un modèle linéaire continu, comme (FRB), dont toutes les contraintes technologiques sont de signe ≤ et dont les membres droits sont non négatifs. Mais la situation n'est plus aussi simple lorsque des contraintes de signe ≥ ou = sont présentes. Nous illustrons les difficultés rencontrées, et une façon de les surmonter, à l'aide d'une version légèrement modifiée du problème de la fonderie Rivière-Bleue.

Nous retrouvons Aurèle Fournier en train de planifier une autre période de production. Il dispose du même nombre d'heures dans les deux ateliers, mais, cette fois, pour diverses raisons qui le concernent – il est le patron après tout! – il désire que les 60 heures de l'atelier de peinture soient utilisées. Il évalue à 12 tonnes la demande maximale pour la tuyauterie, mais croit que le marché pourrait absorber toutes les gueuses qu'il serait en mesure de produire. Enfin, il s'est engagé à livrer 6 tonnes de gueuses à un client régulier et il tient à respecter sa parole. Après réflexion, il a construit le modèle linéaire continu suivant, noté (PMF) ci-après, dont les variables x_1 et x_2 représentent la quantité (en tonnes) de tuyauterie et de gueuses qu'il fabriquera durant la période considérée.

$$\text{Max } z = 1\,000\, x_1 + 1\,200\, x_2 \qquad (0)$$

sous les contraintes :

$10\, x_1 + 5\, x_2 \leq 200$	(ébarbage)		(1)
$2\, x_1 + 3\, x_2 = 60$	(peinture)	(PMF)	(2)
$x_1 \leq 12$	(demande de tuyauterie)		(3)
$x_2 \geq 6$	(commande de gueuses)		(4)
$x_1,\ x_2 \geq 0.$			(5)

L'ajout de variables d'écart ou d'excédent transforme (PMF) en un modèle équivalent (PMF=) dont les contraintes technologiques s'écrivent sous forme d'équations.

$$\text{Max } z = 1\,000\, x_1 + 1\,200\, x_2 \qquad (0)$$

sous les contraintes :

$$10\,x_1 + 5\,x_2 + e_1 = 200 \qquad (6)$$

$$2\,x_1 + 3\,x_2 = 60 \qquad \text{(PMF=)} \qquad (7)$$

$$x_1 + e_3 = 12 \qquad (8)$$

$$x_2 - e_4 = 6 \qquad (9)$$

$$x_1\,,\; x_2\,, e_1\,, e_3\,, e_4 \geq 0. \qquad (10)$$

On cherche une solution optimale de (PMF) et l'on voudrait appliquer l'algorithme du simplexe. La 1re étape serait de construire un lexique initial. Rappelons la façon de procéder utilisée dans le cas du modèle (FRB), dont toutes les contraintes technologiques sont de signe ≤ : on récrit le modèle sous forme équivalente (FRB=), puis on isole les variables d'écart e_i, qui deviennent ainsi les variables de base du lexique numéro 0. Noter que cette approche repose implicitement sur la propriété suivante : chaque e_i apparaît dans une et une seule des équations de (FRB=) et son coefficient y est égal à 1.

Essayons d'appliquer à (PMF) la procédure décrite au paragraphe précédent. Nous avons déjà construit le modèle équivalent (PMF =). On remarque que les variables d'écart e_1 et e_3 respectent la propriété mentionnée à la fin du paragraphe précédent; elles pourraient donc servir de variables de base pour (6) et (8). Mais nous ne disposons pas de variable candidate pour (7). De même, il est impossible de trouver une variable de base pour (9) : x_2 ne fait pas l'affaire car elle apparaît ailleurs que dans (9), ni e_4 car son coefficient est égal à –1 (si nous isolions e_4, nous obtiendrions que $e_4 = -6 + x_2$ et, dans la solution de base associée au lexique, e_4 prendrait la valeur –6, ce qui contredirait l'exigence que toutes les variables doivent être non négatives).

3A.2 La méthode en deux phases

L'astuce de la méthode en deux phases consiste à ajouter des variables de base «artificielles» dans les équations où il n'y a aucune variable candidate naturelle. On considère le système suivant.

$$\text{Max } z = 1\,000\,x_1 + 1\,200\,x_2 \qquad (0)$$

sous les contraintes :

$$10\,x_1 + 5\,x_2 + e_1 = 200 \qquad (11)$$

$$2\,x_1 + 3\,x_2 + a_2 = 60 \qquad (12)$$

$$x_1 + e_3 = 12 \qquad (13)$$

$$x_2 - e_4 + a_4 = 6 \qquad (14)$$

$$x_1\,,\; x_2\,, e_1\,, e_3\,, e_4\,, a_2\,, a_4 \geq 0. \qquad (15)$$

Pour que ce système soit équivalent à (PMF=), et par conséquent à (PMF), il faut que les variables artificielles a_2 et a_4 soient toutes deux nulles. Par exemple, si l'on pose $a_2 = 3$, alors l'équation (12) devient

$$2\,x_1 + 3\,x_2 = 60 - 3 = 57,$$

ce qui signifie que le point $(x_1; x_2)$ ne satisfait pas à la contrainte (2) de (PMF). Pour obtenir un modèle équivalent à (PMF), il faudrait ajouter la contrainte double suivante :

$$a_2 = a_4 = 0, \tag{16}$$

ce qui nous ramènerait à la situation de départ!

Le truc consiste à ne pas inclure (16) dans le modèle et à oublier temporairement l'objectif (0), Dans une première «phase», on utilisera plutôt une fonction-objectif qui pénalise le fait que les variables artificielles prennent des valeurs positives. On considérera ici l'objectif suivant :

$$\text{Min} \quad z_A = a_2 + a_4. \tag{17}$$

Convenons de noter (PMF_A) le modèle consistant à minimiser z_A sous les contraintes (11) à (15). Toute solution admissible $(x_1; x_2)$ de (PMF) détermine une et une seule solution admissible $(x_1; x_2; e_1; e_3; e_4; a_2; a_4)$ de (PMF_A) où $a_2 = a_4 = 0$. Prenons le point admissible (6; 16) : la solution admissible correspondante de (PMF_A) est (6; 16; 60; 6; 10; 0; 0) puisque, par exemple,

$$e_1 = 200 - 10\,x_1 - 5\,x_2 = 200 - (10 \times 6) - (5 \times 16) = 60$$

$$e_4 = -6 + x_2 + a_4 = -6 + 16 + 0 = 10.$$

L'existence d'une solution admissible du modèle (PMF) permet donc de conclure que la valeur minimale de z_A est 0. L'implication inverse est vraie également. En effet, supposons que cette condition soit vérifiée; et considérons une solution de base optimale $(x_1; x_2; e_1; e_3; e_4; a_2; a_4)$ de (PMF_A). Alors,

$$a_2 + a_4 = 0.$$

Or, la somme de variables non négatives est nulle seulement si chacune de ces variables est nulle ; il résulte donc de l'équation précédente que

$$a_2 = a_4 = 0.$$

Et $(x_1; x_2)$ est une solution admissible de (PMF).

En résumé, la résolution du modèle linéaire (PMF_A) permet soit de montrer que le modèle (PMF) ne possède aucune solution admissible, soit d'en trouver une solution de base initiale, selon que la valeur minimale de z_A est 0 ou non.

La résolution algébrique du modèle (PMF) comportera deux phases :

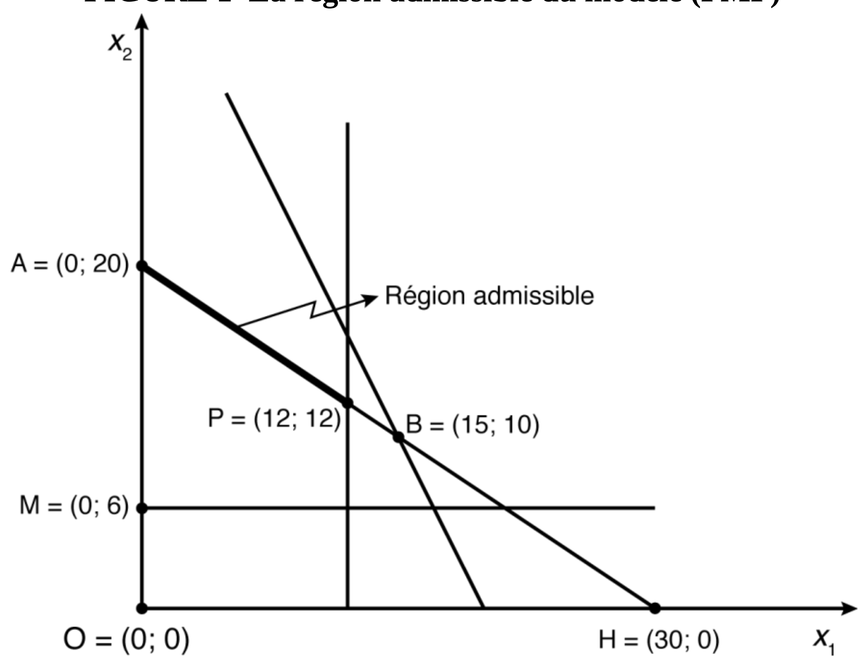
- la première vise à construire un lexique initial et trouver une solution de base admissible : en pratique, il s'agit de résoudre (PMF_A), c'est-à-dire de minimiser la fonction-objectif artificielle z_A sous les contraintes (11) à (15) ;
- la seconde, qui reprend l'objectif original de maximiser z, vise à obtenir une solution optimale.

3A.3 La résolution graphique du modèle (PMF)

Nous appliquerons ci-dessous la méthode en deux phases au modèle (PMF). Mais, auparavant, nous résolvons ce modèle graphiquement, afin d'illustrer visuellement les calculs qui seront effectués.

Première étape: construire la région admissible de ce modèle. Notons que toute solution qui satisfait à l'équation (2) est située sur la droite APBH de la figure 1 ci-dessous. Comme les variables x_1 et x_2 sont *a priori* restreintes aux valeurs non négatives, les solutions admissibles de (PMF) appartiennent nécessairement au segment [A; H]; et même au segment [A; P], puisque x_1 ne peut excéder 12 en vertu de l'inéquation (3). Enfin, les contraintes (1) et (4) sont redondantes en présence des autres et leur prise en compte ne nous amènera à écarter aucun point jusqu'ici accepté. En résumé, la région admissible du modèle (PMF) est le segment [A; P].

FIGURE 1 La région admissible du modèle (PMF)



Pour trouver une solution optimale du modèle (PMF), il suffit d'évaluer la fonction-objectif en chacun des sommets de sa région admissible, puis de choisir le «meilleur» de ces sommets :

- en A = (0; 20), $z = (1000 \times 0) + (1200 \times 20) = 24\,000$;
- en P = (12; 12), $z = (1000 \times 12) + (1200 \times 12) = 26\,400$.

Ainsi, l'unique optimum de (PMF) est le point P = (12; 12).

3A.4 La résolution de (PMF) : la phase I

La phase I consiste, rappelons-le, à rechercher une solution de base admissible initiale de (PMF) en tentant de trouver une solution optimale de (PMF_A) qui annule les différentes variables artificielles. Les contraintes technologiques (11)-(14) expriment déjà quatre variables de base en fonction des variables hors base x_1, x_2 et e_4. Mais, il n'en est pas de même dans la formule (17) qui donne l'objectif du modèle (PMF_A). Il faut donc écrire z_A en fonction de ces variables hors base :

$$z_\text{A} = a_2 + a_4 = (60 - 2\,x_1 - 3\,x_2) + (6 - x_2 + e_4) = 66 - 2\,x_1 - 4\,x_2 + e_4.$$

Voici donc le lexique numéro 0 de la phase I. La solution de base associée correspond au point O = (0; 0) et n'est pas une solution admissible de (PMF).

$$\text{Max } z_\text{A} = 66 - 2\,x_1 - 4\,x_2 + e_4$$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
e_1 & = & 200 & - & 10\,x_1 & - & 5\,x_2 & & \\
a_2 & = & 60 & - & 2\,x_1 & - & 3\,x_2 & & \\
e_3 & = & 12 & - & x_1 & & & & \\
a_4 & = & 6 & & & - & x_2 & + & e_4
\end{array}$$

$$x_1,\ x_2,\ e_1,\ e_3,\ e_4,\ a_2,\ a_4 \ \geq\ 0.$$

1re itération. La variable entrante est x_2. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base, sous l'hypothèse que les autres variables hors base, x_1 et e_4, restent nulles :

$$e_1 \geq 0 : \ x_2 \leq 200 / 5 = 40$$

$$a_2 \geq 0 : \ x_2 \leq 60 / 3 = 20$$

$e_3 \geq 0$: aucune limite, car e_3 est toujours égale à 12 quand $x_1 = e_4 = 0$

$e_4 \geq 0$: $x_2 \leq 6 / 1 = 6$.

Par conséquent, la valeur limite de la variable entrante x_2 est 6 et la variable sortante est a_4. Il reste à effectuer le pivotage. D'abord, l'équation associée au pivot (la dernière) permet d'isoler la variable entrante x_2 en fonction des variables hors base du prochain lexique :

$$x_2 = 6 + e_4 - a_4.$$

On calcule ensuite les équations du prochain lexique :

$$z_A = 66 - 2\,x_1 - 4\,(6 + e_4 - a_4) + e_4 = 42 - 2\,x_1 - 3\,e_4 + 4\,a_4$$

$$e_1 = 200 - 10\,x_1 - 5\,(6 + e_4 - a_4) = 170 - 10\,x_1 - 5\,e_4 + 5\,a_4$$

$$a_2 = 60 - 2\,x_1 - 3\,(6 + e_4 - a_4) = 42 - 2\,x_1 - 3\,e_4 + 3\,a_4.$$

Voici le lexique résultant (l'équation impliquant e_3 n'est pas modifiée, car la variable entrante x_2 n'y apparaît pas). La solution de base associée correspond au point M = (0; 6).

$$\text{Max } z_A = 42 - 2\,x_1 - 3\,e_4 + 4\,a_4$$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} e_1 & = & 170 & - & 10\,x_1 & - & 5\,e_4 & + & 5\,a_4 \\ a_2 & = & 42 & - & 2\,x_1 & - & 3\,e_4 & + & 3\,a_4 \\ e_3 & = & 12 & - & x_1 & & & & \\ x_2 & = & 6 & & & + & e_4 & - & a_4 \end{array}$$

$$x_1,\ x_2,\ e_1,\ e_3,\ e_4,\ a_2,\ a_4 \geq 0.$$

2^re itération. La variable entrante est e_4. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base, sous l'hypothèse que les autres variables hors base, x_1 et a_4, restent nulles :

$e_1 \geq 0$: $e_4 \leq 170 / 5 = 34$

$a_2 \geq 0$: $e_4 \leq 42 / 3 = 14$

$e_3 \geq 0$: aucune limite, car e_3 est toujours égale à 12 quand $x_1 = a_4 = 0$

$x_2 \geq 0$: aucune limite, car x_2 augmente quand e_4 augmente et $x_1 = a_4 = 0$.

Par conséquent, la valeur limite de la variable entrante e_4 est 14 et la variable sortante est a_2. Il reste à effectuer le pivotage. D'abord, l'équation associée au pivot (la 2^e) permet d'isoler la variable entrante e_4 en fonction des variables hors base du prochain lexique :

$$e_4 = (42 - 2\,x_1 - a_2 + 3\,a_4) / 3 = 14 - 0{,}67\,x_1 - 0{,}33\,a_2 + a_4.$$

On calcule ensuite les équations du prochain lexique :

$$z_A = 42 - 2\,x_1 - 3\,(14 - 0{,}67\,x_1 - 0{,}33\,a_2 + a_4) + 4\,a_4 = 0 + a_2 + a_4$$

$$e_1 = 170 - 10\,x_1 - 5\,(14 - 0{,}67\,x_1 - 0{,}33\,a_2 + a_4) + 5\,a_4 = 100 - 6{,}67\,x_1 - 1{,}67\,a_2 + 5\,a_4$$

$$x_2 = 6 + (14 - 0{,}67\,x_1 - 0{,}33\,a_2 + a_4) - a_4 = 20 - 0{,}67\,x_1 - 0{,}33\,a_2.$$

Voici le lexique résultant (l'équation impliquant e_3 n'est pas modifiée, car la variable entrante x_2 n'y apparaît pas). La solution de base associée correspond au point A = (0; 20).

$$\text{Max } z_A = 0 + a_2 + a_4$$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{lclclclcl}
e_1 & = & 100 & - & 6{,}67\,x_1 & - & 1{,}67\,a_2 & + & 5\,a_4 \\
e_4 & = & 14 & - & 0{,}67\,x_1 & - & 0{,}33\,a_2 & + & a_4 \\
e_3 & = & 12 & - & x_1 & & & & \\
x_2 & = & 20 & - & 0{,}67\,x_1 & - & 0{,}33\,a_2 & &
\end{array}$$

$$x_1\,,\; x_2\,,\; e_1\,,\; e_3\,, e_4\,,\; a_2\,,\; a_4 \;\geq\; 0.$$

Ce dernier lexique est optimal. Comme la valeur de z_A est nulle, $(x_1; x_2) = (0; 20)$ est une solution admissible de (PMF). Pour l'essentiel, nous avons atteint notre objectif de trouver un lexique initial. Cependant, avant de démarrer la phase II qui consiste à rechercher une solution optimale pour z, il faut apporter quelques ajustements au dernier lexique de la phase I.

3A.5 La transition entre les deux phases

La phase II reprendra l'objectif original, qui était de maximiser $z = 1000\,x_1 + 1200\,x_2$. Le lexique n^{o} 0 de la phase II s'obtient en modifiant le dernier lexique de la phase I de la façon suivante :

- on biffe les variables artificielles;
- on exprime la fonction-objectif z en fonction des variables hors base du dernier lexique de la phase I, en excluant les variables artificielles (il reste alors une seule variable hors base, soit x_1) :

$$z = 1\,000\,x_1 + 1\,200\,x_2 = 1\,000\,x_1 + 1\,200\,(20 - 0{,}67\,x_1) = 24\,000 + 200\,x_1.$$

3A.6 La résolution de (PMF) : la phase II

Voici donc le lexique n^{o} 0 de la phase II.

$$\text{Max } z = 24\,000 + 200\,x_1$$

sous les contraintes :

$$e_1 = 100 - 6{,}67\,x_1$$

$$\begin{array}{rcrcr} e_4 & = & 14 & - & 0{,}67\,x_1 \\ e_3 & = & 12 & - & x_1 \\ x_2 & = & 20 & - & 0{,}67\,x_1 \end{array}$$

$$x_1\,,\ x_2\,,\ \ e_1\,,\ e_3\,, e_4\ \geq\ 0.$$

1re itération. La variable entrante est x_1. Pour déterminer la variable sortante, on calcule d'abord les limites de l'augmentation à donner à la variable entrante induites par la non-négativité des variables de base :

$e_1 \geq 0 : \ x_1 \leq \ 100 / 6{,}67 = 15$

$e_4 \geq 0 : \ x_1 \leq \ 14 / 0{,}67 = 21$

$e_3 \geq 0 : \ x_1 \leq \ 11 / 1 = 12$

$x_2 \geq 0 : \ x_1 \leq \ 20 / 0{,}67 = 30.$

Par conséquent, la valeur limite de la variable entrante x_1 est 12 et la variable sortante est e_3. Il reste à effectuer le pivotage. D'abord, l'équation associée au pivot (la 3e) permet d'isoler la variable entrante x_1 en fonction des variables hors base du prochain lexique :

$$x_1 = \ 12 - e_3.$$

On calcule ensuite les équations du prochain lexique :

$z \ = \ 24\,000 + 200\,(12 - e_3) \ = \ 26\,400 - 200\,e_3$

$e_1 \ = \ 100 - 6{,}67\,(12 - e_3) \ = \ 20 + 6{,}67\,e_3$

$e_4 \ = \ 14 - 0{,}67\,(12 - e_3) \ = \ 6 + 0{,}67\,e_3$

$x_2 \ = 20 - 0{,}67\,(12 - e_3) \ = \ 12 + 0{,}67\,e_3.$

Voici le lexique résultant. La solution de base associée correspond au point P = (12; 12).

Max $z \ = \ 26\,400 - 200\,e_3$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{rcrcr} e_1 & = & 20 & + & 6{,}67\,e_3 \\ e_4 & = & 6 & + & 0{,}67\,e_3 \\ x_1 & = & 12 & - & e_3 \\ x_2 & = & 12 & + & 0{,}67\,e_3 \end{array}$$

$$x_1\,,\ x_2\,,\ \ e_1\,,\ e_3\,, e_4\ \geq\ 0.$$

Ce lexique est optimal, car le profit marginal de la seule variable hors base est négatif. L'algorithme du simplexe nous a donc permis de trouver l'unique solution optimale (12; 12) du modèle (PMF).

3A.7 Les difficultés liées à la transition

Il arrive que la phase I se termine par un lexique dont la base contient une ou plusieurs variables artificielles. Si l'une d'entre elles prend une valeur positive, la valeur minimale de z_A est positive et, par conséquent, le modèle (P) n'a pas de solution admissible. Par contre, si toutes les variables artificielles de base prennent une valeur nulle, on tentera de les sortir de la base, de façon à démarrer la phase II avec un lexique dont la base ne contient aucune variable artificielle.

Considérons une variable artificielle a_s qui est variable de base (sur la ligne i) dans un lexique de la phase I dans lequel la valeur de z_A est nulle. Deux cas peuvent survenir.

- Sur la ligne i de ce lexique, au moins une variable hors base non artificielle admet un coefficient non nul. On peut alors chasser a_s de la base en prenant l'une d'entre elles comme variable entrante et a_s comme variable sortante. Dans un tel cas, on acceptera même de pivoter par rapport à un coefficient positif (pour un exemple, voir ci-dessous, en 3A.8).

- Sur la ligne i de ce lexique, les coefficients des variables hors base non artificielles sont tous nuls. L'équation de la ligne i se lit alors, après que les variables artificielles hors base aient été biffées :

  $$a_s = 0. \tag{18}$$

  On peut, dans ce cas, démarrer la phase II, même si la variable a_s est toujours dans la base : en effet, l'équation (18) ne sera pas modifiée lors des itérations ultérieures et sera toujours satisfaite; par conséquent, les solutions de base obtenues seront toutes admissibles.

3A.8 Transition entre les deux phases: cas pathologique n$^{\text{o}}$ 1

Considérons le modèle linéaire continu (P) suivant.

$$\text{Max } z = 2\,x_1 + x_2$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 &= 2 \\ x_1 - 3\,x_2 &\geq 1 \\ x_1 - x_2 &= 3 \\ x_1\,,\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

La région admissible de (P) se réduit au seul point (4; 1), qui évidemment est optimal. Le tableau 1 (voir page 10) donne la séquence des lexiques de la phase I. Dans le lexique n$^{\text{o}}$ 1, la limite minimale 1 revient sur deux lignes; nous avons choisi de traiter a_1 comme variable sortante et de conserver a_3 dans la base.

TABLEAU 1 Cas pathologique n° 1: séquence des lexiques

N°	Base	Valeur	x_1	x_2	e_2	Limite
0	z_A	6	-3	6	1	
	a_1	2	-1	2	0	2
←	a_2	1	**-1**	3	1	1
	a_3	3	-1	1	0	3
			↑			
	Base	Valeur	x_2	e_2	a_2	Limite
1	z_A	3	-3	-2	3	
←	a_1	1	**-1**	-1	1	1
	x_1	1	3	1	-1	*
	a_3	2	-2	-1	1	1
			↑			
	Base	Valeur	e_2	a_1	a_2	Limite
2	z_A	0	1	3	0	Optimal
	x_2	1	-1	-1	1	1
	x_1	4	-2	-3	2	4
←	a_3	0	**1**	2	-1	0
			↑			
	Base	Valeur	a_1	a_2	a_3	
3	z_A	0	0	0	0	Optimal
	x_2	1	1	0	-1	
	x_1	4	1	0	-2	
	e_2	0	-2	1	1	

Le lexique n° 2 est optimal, mais la base de ce lexique contient une variable artificielle, soit a_3. Pour chasser a_3 de la base, on convient de prendre e_2 comme variable entrante et a_3 comme variable sortante. Dans le lexique subséquent, qui lui aussi est optimal, la base ne contient aucune variable artificielle. La phase I est alors terminée. Avant de démarrer la phase II, on biffe les variables artificielles : le système résultant ne contient aucune variable hors base et, par conséquent, aucune itération ne sera requise lors de la phase II. L'unique solution optimale du modèle (P) est donc : $x_1 = 4$ et $x_2 = 1$; la valeur correspondante de la fonction-objectif est

$$z = (2 \times 4) + 1 = 9.$$

3A.9 Transition entre les deux phases: cas pathologique n° 2

Considérons le modèle linéaire continu (P) suivant.

$$\text{Max } z = 6\,x_{11} + 5\,x_{12} + 7\,x_{21} + 4\,x_{22}$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &= 20 \\ x_{21} + x_{22} &= 10 \\ x_{11} + x_{21} &= 13 \\ x_{12} + x_{22} &= 17 \\ x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} &\geq 0. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un exemple typique de problème de transport équilibré (voir la section 5.3). Le tableau 2 (voir page 12) donne la séquence des lexiques de la phase I. Nous avons choisi de prendre, comme variables entrantes, x_{11} lors de la 1re itération, x_{12} lors de la 2e et enfin x_{21} lors de la 3e. Dans le lexique n° 2, la limite minimale 10 revient sur deux lignes; nous avons choisi de traiter a_2 comme variable sortante et de conserver a_4 dans la base. Le lexique n° 3 est optimal; la variable artificielle a_4 y apparaît comme variable de base, mais les coefficients des variables hors base non artificielles sont tous nuls dans l'équation associée à cette variable artificielle et on ne pourra donc pas chasser a_4 de la base. On procède alors à la transition, sans effectuer de pivotage.

La transition consiste ici à biffer les colonnes des variables hors base artificielles a_1, a_2 et a_3, et à recalculer la fonction-objectif z :

$$z = 6x_{11} + 5x_{12} + 7x_{21} + 4x_{22} = 6(3 + x_{22}) + 5(17 - x_{22}) + 7(10 - x_{22}) + 4x_{22} = 173 - 2x_{22}.$$

TABLEAU 2 Cas pathologique n° 2: séquence des lexiques

N°		Base	Valeur	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	Limite
0		z_A	60	-2	-2	-2	-2	
		a_1	20	-1	-1	0	0	20
		a_2	10	0	0	-1	-1	*
	←	a_3	13	**-1**	0	-1	0	13
		a_4	17	0	-1	0	-1	*
				↑				
1		Base	Valeur	x_{12}	x_{21}	x_{22}	a_3	Limite
		z_A	34	-2	0	-2	2	
	←	a_1	7	**-1**	1	0	1	7
		a_2	10	0	-1	-1	0	*
		x_{11}	13	0	-1	0	-1	*
		a_4	17	-1	0	-1	0	17
				↑				
2		Base	Valeur	x_{21}	x_{22}	a_1	a_3	Limite
		z_A	20	-2	-2	2	0	
		x_{12}	7	1	0	-1	1	*
	←	a_2	10	**-1**	-1	0	0	10
		x_{11}	13	-1	0	0	-1	13
		a_4	10	-1	-1	1	-1	10
				↑				
3		Base	Valeur	x_{22}	a_1	a_2	a_3	
		z_A	0	0	2	2	0	Optimal
		x_{12}	17	-1	-1	-1	1	
		x_{21}	10	-1	0	-1	0	
		x_{11}	3	1	0	1	-1	
		a_4	0	0	1	1	-1	

Voici donc le lexique n° 0 de la phase II.

$$\text{Max } z = 173 - 2\,x_{22}$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned}
x_{12} &= 17 - x_{22} \\
x_{21} &= 10 - x_{22} \\
x_{11} &= 3 + x_{22} \\
a_4 &= 0
\end{aligned}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, a_4 \geq 0.$$

Ce lexique n'est pas optimal. On effectue donc une itération : x_{22} entrera dans la base et x_{21} en sortira. Voici le lexique résultant.

$$\text{Max } z = 153 + 2\,x_{21}$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned}
x_{12} &= 7 + x_{21} \\
x_{22} &= 10 - x_{21} \\
x_{11} &= 13 - x_{21} \\
a_4 &= 0
\end{aligned}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, a_4 \geq 0.$$

Ce dernier lexique est optimal. Tel qu'indiqué en 3A.7, l'équation associée à la variable artificielle a_4 qui apparaît dans les bases de la phase II reste inchangée d'une itération à l'autre. On pourrait, pour alléger, retirer cette équation des lexiques de la phase II.

3A.10 Un modèle sans solution admissible

Considérons le modèle linéaire continu (P) suivant.

$$\text{Max } z = 2\,x_1 + 7\,x_2 \tag{19}$$

sous les contraintes :

$$x_1 + x_2 \leq 2 \tag{20}$$

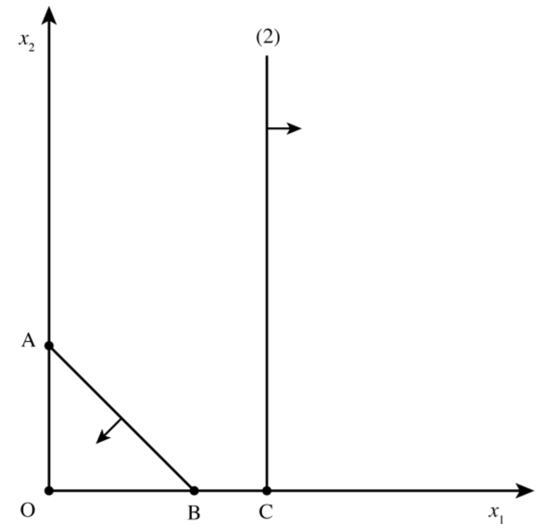
$$x_2 \geq 3 \tag{21}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Les points du premier quadrant qui satisfont à l'inéquation (20) forment le triangle OAB de la figure ci-contre, où

A = (0; 2) et B = (2; 0).

Évidemment, aucun d'entre eux n'admet une coordonnée x_1 qui soit supérieure ou égale à 3; par conséquent, le modèle (P) ne possède aucune solution admissible.



Appliquons la méthode en deux phases au modèle (P). Pour construire le lexique initial de la phase I, il faut d'abord introduire une variable d'écart e_1 dans l'inéquation (20), puis une variable d'excédent e_2 et variable artificielle a_2 dans (21). L'objectif de la phase I consiste à minimiser la somme z_A des variables artificielles; ici, comme une seule variable de ce type est utilisée, la fonction-objectif z_A se réduit à a_2. Voici donc le lexique initial.

Min $z_A = 3 - x_1 + e_2$
sous les contraintes :

$$\begin{aligned} e_1 &= 2 - x_1 - x_2 \\ a_2 &= 3 - x_1 + e_2 \end{aligned}$$

$$x_1 ,\ x_2 ,\ e_1 ,\ e_2 ,\ a_2 \geq 0.$$

La variable entrante est x_1 et la variable sortante, e_1. Voici le lexique 1 résultant du pivotage.

Min $z_A = 1 + x_2 + e_1 + e_2$
sous les contraintes :

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - x_2 - e_1 \\ a_2 &= 1 + x_2 + e_1 + e_2 \end{aligned}$$

$$x_1 ,\ x_2 ,\ e_1 ,\ e_2 ,\ a_2 \geq 0.$$

Ce dernier lexique est optimal. Ainsi, la valeur minimale de z_A est 1, ce qui signifie qu'il est impossible d'annuler z_A, ou encore de trouver une solution admissible du modèle (P). L'approche algébrique confirme donc l'analyse graphique.

Cet exemple illustre le principe général suivant : **si la valeur de la fonction-objectif z_A est positive dans le lexique final de la phase I, le modèle considéré ne possède aucune solution admissible**.