## 2B Quelques trucs de modélisation

La présente section illustre quelques techniques plus avancées de modélisation. Les exemples qui suivent indiquent comment ramener dans le giron des modèles linéaires des situations qui, a priori, ne respectent pas les hypothèses des modèles linéaires décrites en section 2.1.1.

### 2B.1 La modification avec pénalité du membre droit d'une contrainte

Une petite coopérative laitière a lancé, l'été dernier, une crème glacée dite estivale, truffée de morceaux de fruits frais, pour laquelle les amateurs se sont emballés. Une étude de marché menée à l'automne indique comme fort probable que cet engouement perdurera l'été prochain et se traduira en ventes mirobolantes si les coopérateurs arrivent à augmenter leur production. Cependant, le goût de cette crème glacée s'altère rapidement à la congélation profonde, qui serait nécessaire pour pouvoir la transporter sur de grandes distances vers les marchés potentiels, car les morceaux de fruits soumis à de trop basses températures perdent de leur saveur. Les coopérateurs songent donc à mettre sur pied 5 petites usines régionales pour alimenter le marché. Ils comptent ne risquer dans cette aventure que les surplus de caisse dont ils disposent présentement, soit 32 000 \$. Le tableau 1 donne, en milliers de dollars, les prévisions de ventes des 5 usines projetées et les dépenses afférentes à la mise sur pied de chacune.

**TABLEAU 1 Coopérative laitière: ventes et dépenses (en 000 \$) prévues**

| **Région** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Ventes** | 80 | 60 | 20 | 16 | 18 |
| **Dépenses** | 16 | 16 | 10 | 8 | 6 |

Dans quelles régions les coopérateurs devraient-ils construire une usine si leur objectif est de maximiser les ventes prévues? Définissons:

$$v_j = 1 \text{ si l'usine de la région } j \text{ est mise sur pied.}$$

Le modèle s'écrit:

$$\text{Max } z = 80\, v_1 + 60\, v_2 + 20\, v_3 + 16\, v_4 + 18\, v_5$$

sous la contrainte de budget:

$$16\, v_1 + 16\, v_2 + 10\, v_3 + 8\, v_4 + 6\, v_5 \leq 32$$

et les contraintes:

$$v_j = 0, 1 \qquad\qquad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Une solution optimale indique que les usines des régions 1 et 2 seront mises sur pied, que le budget de 32 000 $ sera complètement investi et que les ventes prévues s'élèveront à 140 000 $.

Le trésorier de la coopérative s'aperçoit que les coopérateurs ne disposent en fait que de 31 900 $. Il modifie le modèle en changeant le membre droit de la contrainte de de budget Et il arrive aux conclusions suivantes: il faut plutôt mettre sur pied les usines des régions l, 4 et 5 ; l'investissement requis ne sera que de 30 000 $ ; les ventes prévues s'élèveront à 114 000 $ seulement. Il trouve absurde ce changement radical de la décision optimale et soupçonne que la modélisation proposée souffre d'un défaut troublant. Prévenus, les coopérateurs s'empressent de souscrire les 100 $ qui permettront de mettre sur pied les usines des régions 1 et 2 et d'espérer réaliser des ventes de 140 000 $. Il en aurait été tout autrement, peut-être, s'il leur avait fallu trouver plus de 5000 $ ...

Quelle modification faut-il apporter au modèle pour prévenir cette situation paradoxale? Il suffit d'attacher un coût à une augmentation du membre droit de la contrainte de budget et de modifier le modèle en conséquence.

Supposons, pour fixer les idées, que chaque dollar additionnel investi par les coopérateurs leur revienne à 1,25 $, compte tenu des intérêts qu'ils verseront, etc. Et définissons $y$ comme le budget supplémentaire (en milliers de dollars) requis des coopérateurs pour atteindre une solution plus avantageuse, Ce budget supplémentaire pourra être borné supérieurement par une contrainte du type « $y \leq 5$ » de façon à tenir compte de la quasi-impossibilité pour les coopérateurs de trouver plus de 5 000 $. Le modèle devient donc:

$$\text{Max } z = 80\, v_1 + 60\, v_2 + 20\, v_3 + 16\, v_4 + 18\, v_5 - 1{,}25\, y$$

sous les contraintes:

$$16\, v_1 + 16\, v_2 + 10\, v_3 + 8\, v_4 + 6\, v_5 \leq 32 + y$$

$$0 \leq y \leq 5$$

$$v_j = 0, 1 \qquad\qquad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

On peut étendre cette approche à tout problème où, pour une contrainte de ressource du type

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + a_3\, x_3 + \ldots + a_n\, x_n \leq b,$$

il est possible de se procurer jusqu'à $d$ unités supplémentaires de cette ressource à un coût unitaire de $c$. On écrit:

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + a_3\, x_3 + \ldots + a_n\, x_n \leq b + y$$

$$0 \leq y \leq d.$$

De plus, on ajoute à la fonction-objectif le terme « $- c\, y$ ».

### 2B.2 La recherche du maximum de plusieurs minima: le joueur

Chaque fois qu'une métropole veut se doter d'une nouvelle caserne de pompiers se pose le problème d'en bien choisir l'emplacement. Le règlement de zonage, la facilité d'exécution des manoeuvres des camions d'incendie et la rapidité d'accès aux grandes artères sont certes pris en considération. Mais le critère qui prime est l'amélioration de la qualité des services offerts aux citoyens. Comment mesurer rationnellement cette amélioration? Voici une façon d'y parvenir. Pour chaque répartition du territoire de la métropole entre les casernes, il existe, dans la zone d'intervention attribuée à chaque caserne, au moins un quartier dont le temps d'attente pour l'intervention des pompiers, en cas d'incendie, est le plus long. L'emplacement de la nouvelle caserne est déclaré optimal pour une répartition donnée aussitôt qu'on réussit à minimiser ce temps d'attente le plus long. Il s'agit donc de déterminer le maximum des temps d'attente pour chaque répartition plausible du territoire entre les casernes, puis de retenir la répartition qui assure le plus faible maximum.

Pour l'implantation optimale d'un nouvel hôpital de soins primaires ou la ventilation la plus adéquate d'un parc ambulancier pendant les heures de pointe, on utilise une méthode apparentée à celle qui permet de choisir l'emplacement optimal d'une nouvelle caserne de pompiers. Dans ces contextes, la technique de modélisation à mettre en œuvre est similaire à celle utilisée dans la recherche du minimum de plusieurs maxima. Voici une situation amusante pour illustrer ce type de technique, où il s'agit, à l'inverse, de trouver le maximum de plusieurs minima.

Un joueur invétéré, criblé de dettes, surveillé par ses multiples créanciers à l'affût du moindre de ses gains, a enfin décidé de limiter les dégâts. Il continue de s'adonner au jeu, certes, mais sans essayer de décrocher la timbale. Il jouera sans perdre, dit-il. Ses proches lui ont fait remarquer que les deux objectifs qu'il poursuit semblent irréconciliables, mais il n'en démord pas. Poussé par ce qu'il appelle son sixième sens, il décide de miser ce qui lui reste de la vente de sa voiture et ce qu'il a pu obtenir d'un vague cousin qui passait par là, sur la sixième course de ce soir à l'hippodrome de Jonquière. Il a en poche la somme de 2 509 $. Le *Progrès-dimanche* donne comme partants les chevaux suivants:

- Arrnide à 4 contre 1
- Bayard à 5 contre 1
- Charlemagne à 6 contre 1
- Dunois à 7 contre 1
- Éclair à 8 contre 1
- Falstrade à 9 contre 1.

Pour maximiser ses gains éventuels, le joueur devrait tout miser sur Falstrade, mais ce pari est très risqué. Pour minimiser ses pertes, il lui suffirait de ne rien miser dans cette course, mais il se « doit» de jouer. Investir toute la somme disponible sur un cheval ne serait pas minimiser les pertes, si ce dernier ne gagnait pas la course. Le joueur décide donc de répartir son argent sur l'ensemble des chevaux qui prendront le départ, de façon à ne pas se retrouver sans le sou même dans la pire des éventualités. Son objectif devient de maximiser le gain net minimal qu'il pourrait réaliser dans cette course.

Le modèle utilise une variable $y$ définie plus loin et des variables $x_A$, $x_B$, ..., $x_F$ définies de la façon suivante :

$$x_J = \text{pari (en dollars) sur le cheval } J.$$

Si Armide gagne la course, le gain net du joueur sera de ($4\,x_A - 2\,509$) dollars. De même, le gain net résultant d'une victoire de Bayard sera de ($5\,x_B - 2\,509$) dollars. La variable $y$ représente le minimum des gains potentiels nets provenant de la victoire des différents chevaux. Le modèle peut donc s'écrire:

$$\text{Max } z = y$$

sous les contraintes :

$$
\begin{aligned}
&4\,x_A - y \ \geq\ 2\,509\\
&5\,x_B - y \ \geq\ 2\,509\\
&6\,x_C - y \ \geq\ 2\,509\\
&7\,x_D - y \ \geq\ 2\,509\\
&8\,x_E - y \ \geq\ 2\,509\\
&9\,x_F - y \ \geq\ 2\,509\\
&x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F = 2\,509\\
&x_J \geq 0 \qquad\qquad J = A, B, \ldots, F.
\end{aligned}
$$

Une solution optimale de ce modèle donne :

$$x_A = 630 \quad x_B = 504 \quad x_C = 420 \quad x_D = 360 \quad x_E = 315 \quad x_F = 280$$

$$z = 11 \text{ (dollars).}$$

Résultat qui en surprendra plus d'un: il semble donc possible de gagner à coup sûr aux courses ... Toutefois, le lecteur qui croit pouvoir récupérer une partie du prix d'achat de ce manuel en se rendant ce soir à la piste de courses la plus près de chez lui devrait y regarder à deux fois: la course décrite ci-dessus présente quelque chose d'inhabituel que les amateurs de courses sous harnais ne tarderont pas à découvrir.

## 2B.3 Les variables libres: les livraisons d'Attache-Tout

Attache-Tout, manufacturier de la machine à ficeler du même nom, devra effectuer à la fin des 6 prochains mois les livraisons suivantes chez ses concessionnaires.

**TABLEAU 2 Attache-Tout: livraisons pour le prochain semestre**

| Fin du mois | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de machines à livrer | 30 | 70 | 40 | 60 | 80 | 20 |

Les coûts de production d'une machine à ficeler s'élèvent à 30 000 $. Une machine fabriquée au cours d'un mois et qui n'est pas livrée à la fin de ce mois doit être entreposée au coût de 1 500 $ par mois jusqu'à sa livraison, toute partie de mois d'entreposage étant comptée pour un mois complet.

Lorsque le nombre de machines fabriquées diffère d'un mois à l'autre, Attache-Tout doit assumer des frais reliés à la taille de la main-d'oeuvre. Une augmentation de la production entraîne des frais de 2 500 $ pour chacune des machines excédentaires, car il faut recruter et former du personnel pour assurer cet accroissement. Pour une diminution de la production, Attache-Tout doit verser des primes de congédiement, qui équivalent à 2 000 $ par machine en moins.

Les livraisons doivent impérativement se faire à la fin du mois pour lequel les commandes ont été placées. Durant le mois qui a précédé le semestre dont il est ici question, Attache-Tout a manufacturé 50 machines à ficeler qui ont toutes été livrées: il n'y a présentement aucune machine à ficeler en entrepôt. Attache-Tout veut minimiser, au cours du prochain semestre, le total des coûts tout juste décrits. Définissons les variables de décision :

$m_j$ = nombre de machines à ficeler manufacturées au cours du mois $j$

$e_j$ = nombre de machines à ficeler entreposées à la fin du mois $j$

$x_j$ = différence entre le nombre de machines à ficeler fabriquées au cours du mois $j$ et le nombre de celles fabriquées au cours du mois précédent.

Chaque $x_j$ est une **variable libre** qui peut prendre une valeur positive, négative nulle. Nous la décomposons en une différence $x_{js} - x_{jd}$ :

$$x_j = x_{js} - x_{jd} \qquad \text{où } x_{js} \text{ et } x_{jd} \geq 0.$$

Ici, $x_{js}$ représente un surplus ou une augmentation de la production du mois $j$ sur le mois précédent; et $x_{jd}$, un déficit ou une diminution de cette production.

Il s'agit de minimiser le total $z$ des coûts de production, *CProd*, des coûts d'entreposage, *CEntr*, des coûts engendrés par l'augmentation de la production de l'un des 6 mois par rapport à celle du mois précédent, *CAugm*, ainsi que des coûts découlant de la diminution de la production entre chaque paire de mois consécutifs, *CDim*. La fonction-objectif s'écrit donc:

$$\text{Min } z = CProd + CEntr + CAugm + CDim$$

où

$$CProd = 30\,000\,(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6)$$

$$CEntr = 1\,500\,(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6)$$
$$CAugm = 2\,500\,(x_{1s} + x_{2s} + x_{3s} + x_{4s} + x_{5s} + x_{6s})$$
$$CDim = 2\,000\,(x_{1d} + x_{2d} + x_{3d} + x_{4d} + x_{5d} + x_{6d}).$$

Les contraintes à respecter se regroupent en 3 catégories. La première caractérise les variables $e_j$ reliées à l'entreposage:

$$e_1 = 0 + m_1 - 30$$
$$e_2 = e_1 + m_2 - 70$$
$$e_3 = e_2 + m_3 - 40$$
$$e_4 = e_3 + m_4 - 60$$
$$e_5 = e_4 + m_5 - 80$$
$$e_6 = e_5 + m_6 - 20.$$

La non-négativité des variables $e_j$ assure que les unités produites auxquelles s'ajoutent les unités entreposées le mois précédent seront suffisantes pour satisfaire les commandes. Les contraintes de la deuxième catégorie décomposent les variations de la production entre chaque paire de mois consécutifs en une différence de 2 variables non négatives:

$$m_1 - 50 = x_{1s} - x_{1d}$$
$$m_2 - m_1 = x_{2s} - x_{2d}$$
$$m_3 - m_2 = x_{3s} - x_{3d}$$
$$m_4 - m_3 = x_{4s} - x_{4d}$$
$$m_5 - m_4 = x_{5s} - x_{5d}$$
$$m_6 - m_5 = x_{6s} - x_{6d}.$$

La troisième catégorie comprend les contraintes usuelles de non-négativité:

$$m_j\,,\; x_{js}\,,\; x_{jd}\,,\, e_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, 6.$$

Une solution optimale donne :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $m_1 = 50$ | $e_1 = 20$ | $x_{1s} = 0$ | $x_{1d} = 0$ |
| $m_2 = 50$ | $e_2 = 0$ | $x_{2s} = 0$ | $x_{2d} = 0$ |
| $m_3 = 50$ | $e_3 = 10$ | $x_{3s} = 0$ | $x_{3d} = 0$ |
| $m_4 = 65$ | $e_4 = 15$ | $x_{4s} = 15$ | $x_{4d} = 0$ |
| $m_5 = 65$ | $e_5 = 0$ | $x_{5s} = 0$ | $x_{5d} = 0$ |
| $m_6 = 20$ | $e_6 = 0$ | $x_{6s} = 0$ | $x_{6d} = 45$ |

$$z = 9\,195\,000 \text{ (dollars).}$$

### 2B.4 L’écriture sous forme linéaire du produit d’une variable binaire et d’une variable non négative bornée supérieurement

Il s’agit de trouver une façon de remplacer, dans une fonction-objectif, les termes du type $(v_j \times x_j)$, où $v_j$ est une variable binaire et $x_j$, une variable réelle définie dans un intervalle borné supérieurement par une constante $M$.

Ce produit d’une variable binaire et d’une variable réelle, qui n’est pas répréhensible en soi dans l’écriture d’un modèle, soustrait cependant ce dernier à la classe des modèles que nous recherchons ici en priorité : celle des modèles linéaires. En général, les produits de variables, fussent-ils ceux d’une variable binaire et d’une variable réelle, de deux variables binaires ou de deux variables réelles, empêchent la résolution du modèle, où ils sont présents, par les méthodes algorithmiques que nous présentons dans les chapitres 3 et 4. Nous nous efforcerons donc de trouver des astuces pour éviter de recourir à ce genre de produits.

Dans la fonction-objectif, on remplace le produit $(v_j \times x_j)$ par une variable non négative $t_j$ qui prendra la même valeur que $x_j$ quand $v_j = 1$, et sera nulle quand $v_j = 0$. On lie les variables $x_j$ et $t_j$ à l’aide des trois contraintes suivantes :

$$t_j \le M\, v_j$$

$$t_j \le x_j$$

$$x_j - t_j \le M\,(1 - v_j)$$

où $M$ est un «grand» nombre qui dépasse toutes les valeurs plausibles de $x_j$ dans le contexte du problème.

Voici un problème où il est naturel de faire appel à ce procédé de modélisation. Un petit industriel, plus âpre au gain qu’honnête, répartit la production des objets P1, P2, P3 et P4, qu’il met habituellement en marché, entre plusieurs ateliers clandestins qui recrutent des travailleurs au noir. La fabrication de chacun des objets requiert l’attention d’ouvriers de 4 spécialités différentes. La quantité de main-d’oeuvre disponible dans chacune des spécialités et le profit que tire l’industriel des objets fabriqués varient de façon très abrupte d’une semaine à l’autre. Le tableau 3 donne, en plus des durées de fabrication relatives à chacun des objets, la situation qui prévaudra au cours de la semaine qui vient.

Chaque semaine, l’industriel fait fabriquer les objets les plus rentables selon les prix qu’on lui en offre et selon les disponibilités de la main-d’oeuvre. Certaines semaines, il s’en tient au court terme et consacre prioritairement les ressources en main-d’œuvre à la fabrication du produit le plus rentable. Certaines autres semaines, préoccupé par la loyauté de sa clientèle, il cherche à maximiser ses profits, mais en fabriquant seulement les 2 ou même les 3 produits  les plus rentables…

**TABLEAU 3 Petit industriel: données de fabrication**

| Spécialité | Temps de travail (en min.) d'un ouvrier de spécialité S*i* sur un objet P*j* | | | | Heures disponibles |
|---|---|---|---|---|---|
| | **P1** | **P2** | **P3** | **P4** | |
| **S1** | 4 | 3 | 5 | 4 | 1 600 |
| **S2** | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 000 |
| **S3** | 6 | 7 | 7 | 6 | 2 600 |
| **S4** | 4 | 5 | 4 | 5 | 1 800 |
| **Profit (en $/u)** | 0,17 | 0,16 | 0,19 | 0,17 | |

Il construit un premier modèle, sans tenir compte de l'éventualité de restreindre la production à un nombre précis de produits. Il cherche à maximiser le profit hebdomadaire total $z$, où

$$z = 0{,}17\, x_1 + 0{,}16\, x_2 + 0{,}19\, x_3 + 0{,}17\, x_4$$

et où $x_j$ dénote le nombre d'unités du produit $Pj$ à fabriquer au cours de la prochaine semaine. Les contraintes qu'il considère, outre celles de non-négativité, sont :

$$4\, x_1 + 3\, x_2 + 5\, x_3 + 4\, x_4 \leq 96\,000$$

$$3\, x_1 + 2\, x_2 + 3\, x_3 + 2\, x_4 \leq 60\,000$$

$$6\, x_1 + 7\, x_2 + 7\, x_3 + 6\, x_4 \leq 156\,000$$

$$4\, x_1 + 5\, x_2 + 4\, x_3 + 5\, x_4 \leq 108\,000.$$

La solution optimale de ce modèle donne :

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 6\,000$$

$$z = 4\,140 \text{ (dollars).}$$

Si l'industriel désire maximiser ses profits en ne fabriquant qu'un certain nombre des produits Pl, P2, P3 ou P4, lesquels fabriquera-t-il ? En quelles quantités ? Et quels seront ses profits ?

On ne peut apporter réponse à ces questions sans modifier le modèle précédent. Introduisons donc des variables binaires $v_1$, $v_2$, $v_3$ et $v_4$, où

$$v_j = 1 \text{ si l'industriel désire fabriquer le produit } Pj.$$

La fonction-objectif devient :

$$z = 0{,}17\,(v_1 \times x_1) + 0{,}16\,(v_2 \times x_2) + 0{,}19\,(v_3 \times x_3) + 0{,}17\,(v_4 \times x_4).$$

On doit également ajouter la contrainte suivante :

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \text{« } \textit{nombre de produits} \text{ »},$$

où le membre droit « *nombre de produits* » est un entier qui peut varier de 1 à 4.

Il s'agit de faire appel à l'astuce que nous venons de présenter pour obtenir un modèle linéaire où est évitée la présence de produits de variables. Posons :

$$t_j = v_j \times x_j \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$

Le modèle se réécrit :

$$z = 0{,}17\, x_1 + 0{,}16\, x_2 + 0{,}19\, x_3 + 0{,}17\, x_4$$

sous les contraintes :

$$4\, x_1 + 3\, x_2 + 5\, x_3 + 4\, x_4 \leq 96\,000$$

$$3\, x_1 + 2\, x_2 + 3\, x_3 + 2\, x_4 \leq 60\,000$$

$$6\, x_1 + 7\, x_2 + 7\, x_3 + 6\, x_4 \leq 156\,000$$

$$4\, x_1 + 5\, x_2 + 4\, x_3 + 5\, x_4 \leq 108\,000$$

$$t_j \leq 30\,000\, v_j \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

$$t_j \leq x_j \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

$$x_j + 30\,000\, v_j - t_j \leq 30\,000 \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \text{« \textit{nombre de produits} »}$$

avec les contraintes usuelles de non-négativité pour les $t_j$ et les $x_j$ et l'exigence que les variables $v_j$ soient binaires.

- Si on pose : « *nombre de produits* » = 1, alors il vient :

  $x_4 = t_4 = 21\,600 \qquad v_4 = 1$

  $z = 3\,672$ (dollars).

- Si on pose : « *nombre de produits* » = 2, alors il vient :

  $x_1 = t_1 = 12\,000 \qquad v_1 = 1$

  $x_4 = t_4 = 12\,000 \qquad v_4 = 1$

  $z = 4\,080$ (dollars).

- Si on pose : « *nombre de produits* » = 3, alors il vient :

  $x_2 = t_2 = 6\,600 \qquad v_2 = 1$

  $x_3 = t_3 = 9\,000 \qquad v_3 = 1$

  $x_4 = t_4 = 7\,800 \qquad v_4 = 1$

  $z = 4\,092$ (dollars).

- Si on pose : « *nombre de produits* » = 4, alors il vient :

  $x_1 = t_1 = 6\,000 \qquad v_1 = 1$

$$x_2 = t_2 = 6\,000 \qquad v_2 = 1$$

$$x_3 = t_3 = 6\,000 \qquad v_3 = 1$$

$$x_4 = t_4 = 6\,000 \qquad v_4 = 1$$

$$z = 4\ 140 \text{ (dollars).}$$

Le lecteur remarquera que $v_j = 0$ force $t_j = 0$, mais ne force pas $x_j = 0$. Et comme la solution du modèle initial recommandait la production des 4 produits, il est possible d'exiger le profit optimal pour un nombre de produits allant de 1 à 4. Mais si la solution du problème initial n'avait prescrit que la production de 2 des produits, *la seule* latitude laissée à l'industriel aurait été de maximiser ses profits en exigeant soit la production des 2 produits, soit la production du plus rentable des produits selon les ressources disponibles.

## 2B.5 La linéarisation d'expressions en valeur absolue

Il n'est pas possible de linéariser tous les modèles comportant des expressions linéaires en valeur absolue. Voici plusieurs cas où il est toutefois possible de le faire. Notons d'abord qu'une expression de la forme

$$| x_1 + 6\, x_2 | \,,$$

où $x_1$ et $x_2$ sont des variables non négatives, est toujours égale à $x_1 + 6\, x_2$, puisque $| r | = r$ pour tout nombre réel $r \geq 0$. Ainsi, on peut, sans affecter l'ensemble des solutions admissibles, omettre les symboles | | lorsque la valeur absolue s'applique à la somme de variables non négatives affectées de coefficients positifs.

**Cas 1.** Contrainte de signe « ≤ » comportant une **seule** expression linéaire en valeur absolue.

Considérons un exemple numérique simple :

$$| x_1 - 2\, x_2 | \leq 5. \tag{1}$$

La contrainte (1) se réécrit successivement sous les formes équivalentes suivantes :

$$-5 \leq x_1 - 2\, x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + 2\, x_2 \leq 5 \quad \text{et} \quad x_1 - 2\, x_2 \leq 5. \tag{2}$$

Ainsi, (1) peut être remplacée dans le modèle par les deux inéquations linéaires de (2).

Il existe une autre approche pour linéariser (1), moins simple dans le cas présent, mais qui s'adapte facilement à beaucoup d'autres situations et qui sera utilisée dans les cas 3 et 4. On écrit d'abord l'expression linéaire $x_1 - 2\, x_2$ comme la différence de deux variables non négatives :

$$x_1 - 2\, x_2 = s - t \quad \text{et} \quad s,\ t \geq 0. \tag{3}$$

Alors, la contrainte (1) peut être remplacée dans le modèle par la conjonction de (3) et de (4), où

$$s - t \leq 5. \tag{4}$$

En effet, supposons que (1) soit satisfaite. Et introduisons des variables $s$ et $t$ que nous relions à l'expression $x_1 - 2\,x_2$ de la façon suivante :

si $x_1 - 2\,x_2 \geq 0$, on pose : $s = x_1 - 2\,x_2$ et $t = 0$

si $x_1 - 2\,x_2 \leq 0$, on pose : $s = 0$ et $t = -(x_1 - 2\,x_2)$.

Il en résulte immédiatement que $|\,x_1 - 2\,x_2\,| = s + t$ et que, de plus, (3) et (4) sont vérifiées[1]. Réciproquement, supposons que (3) et (4) soient satisfaites. Alors[2]

$$|\,x_1 - 2\,x_2\,| \leq s + t$$

et, par conséquent, (1) est valide en vertu de (4).

**Cas 2.** Contrainte de signe «≥» comportant une **seule** expression linéaire en valeur absolue.

À nouveau, nous considérons un exemple numérique simple

$$|\,2\,x_1 - 3\,x_2\,| \geq 4. \tag{5}$$

Introduisons une variable binaire $v$ telle que

$$v = 1 \quad \text{si} \quad 2\,x_1 - 3\,x_2 \leq 0.$$

On peut montrer que la contrainte (5) est équivalente à

$$2\,x_1 - 3\,x_2 \geq 4 - M\,v \quad \text{et} \quad 2\,x_1 - 3\,x_2 \leq -4 + M\,(1 - v)$$

où $M$ est une constante positive dont la valeur, élevée, est adaptée au contexte.

**Cas 3.** Contrainte de signe «≤» comportant une **somme** d'expressions linéaires en valeur absolue.

Considérons la contrainte

$$|\,x_1 - x_2\,| + |\,2 + 5\,x_3 - 3\,x_1\,| \leq 5. \tag{6}$$

On écrit d'abord chaque expression linéaire mise en valeur absolue comme la différence de deux variables non négatives :

$$x_1 - x_2 = s_1 - t_1 \quad \text{et} \quad s_1,\ t_1 \geq 0 \tag{7}$$

$$2 + 5\,x_3 - 3\,x_1 = s_2 - t_2 \quad \text{et} \quad s_2,\ t_2 \geq 0. \tag{8}$$

[1] Sauf lorsque (1) est satisfaite comme équation, il existe d'autres valeurs de $s$ et de t pour lesquelles (3) et (4) sont valides.

[2] Nous considérons deux cas, selon le signe de l'expression $x_1 - 2\,x_2$ :

- Si $x_1 - 2\,x_2 \geq 0$, $|\,x_1 - 2\,x_2\,| = x_1 - 2\,x_2 = s - t = s + t - 2\,t \leq s + t$.
- Si $x_1 - 2\,x_2 \leq 0$, $|\,x_1 - 2\,x_2\,| = -(x_1 - 2\,x_2) = -s + t = s + t - 2\,s \leq s + t$.

Dans chaque cas, la 1re égalité relève de la définition même de valeur absolue, la seconde est l'équation de la formule (3) et la dernière inégalité découle de la non-négativité des variables $s$ et $t$.

Alors, la contrainte (6) peut être remplacée dans le modèle par la conjonction de (7), de (8) et de (9), où

$$s_1 + t_1 + s_2 + t_2 \leq 5. \qquad (9)$$

**Cas 4**. La fonction-objectif à minimiser comporte une somme d'expressions linéaires en valeur absolue**.**

Nous allons indiquer comment linéariser la fonction-objectif suivante :

$$\text{Min } z = |\,3 - 5\,x_1\,| + |\,4 - 2\,x_1 - 3\,x_2\,| + |\,4\,x_1 - 8\,x_2\,| + |\,x_1 - 7\,x_2 - 2\,x_3\,|. \qquad (10)$$

On écrit d'abord chaque expression linéaire mise en valeur absolue comme la différence de deux variables non négatives :

$$3 - 5\,x_1 = s_1 - t_1 \qquad (11)$$

$$4 - 2\,x_1 - 3\,x_2 = s_2 - t_{12} \qquad (12)$$

$$4\,x_1 - 8\,x_2 = s_3 - t_3 \qquad (13)$$

$$x_1 - 7\,x_2 - 2\,x_3 = s_4 - t_4. \qquad (14)$$

Pour linéariser la fonction-objectif (10), il suffit de minimiser $z$, où

$$z = s_1 + t_1 + s_2 + t_2 + s_3 + t_3 + s_4 + t_4$$

et d'ajouter les contraintes technologiques (11) à (14), ainsi que les contraintes de non-négativité des variables $s_h$ et $t_h$.

Noter que les procédés décrits aux cas 1, 2 et 3 restent valides même quand le membre droit de la contrainte est une expression linéaire, pourvu que la non-négativité de celle-ci soit garantie par les autres contraintes du modèle. Par exemple, on pourrait utiliser l'expression $2\,x_3 + 7$ où $x_3$ est une variable non négative, comme membre droit de (5) : on en déduirait que la contrainte

$$|\,2\,x_1 - 3\,x_2\,| - 2\,x_3 \geq 7$$

peut être remplacée par

$$2\,x_1 - 3\,x_2 - 2\,x_3 \geq 7 - M\,v \quad \text{et} \quad 2\,x_1 - 3\,x_2 + 2\,x_3 \leq -7 + M\,(1 - v).$$

Terminons par une situation himalayenne, dont la modélisation linéaire fait appel à certains des procédés présentés ci-dessus.

**L'Annapurn**a

Pour établir leur camp d'attaque pour la conquête de l'Annapurna, 4 alpinistes, Gilles, Françoise, André et Pierre, se sont attelés à la tâche du transport à dos d'homme de leurs impedimenta à partir du camp de base. Il leur reste un dernier portage à effectuer. Il leur faut se répartir les colis dont les poids (en kg) sont donnés au tableau suivant.

**TABLEAU 4 Annapurna: colis à transporter**

| **Colis** | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** | **G** | **H** | **M** | **N** | **P** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Poids (en** kg) | 24 | 5 | 10 | 13 | 17 | 14 | 22 | 7 | 8 | 11 | 9 |

Les alpinistes souhaitent minimiser autant que possible la somme des différences de poids entre les paires de charges consécutives de la cordée tout en exigeant une différence d'au moins 5 kg entre le premier et le dernier de cordée. Comment répartir les charges entre les quatre alpinistes si André doit être le premier de cordée et Pierre, le dernier de cordée ? Ajoutons que, pour des raisons de sécurité, les alpinistes attribueront chacun des colis A, B et C à une charge différente.

Constituons d'abord les quatre charges. Numérotons consécutivement les charges en allant de celle du premier à celle du dernier de cordée. Et introduisons les variables de décision suivantes :

$x_i$ = poids (en kg) de la charge $i$

$v_{iJ} = 1$ si le colis $J$ fait partie de la charge $i$.

L'écriture d'un modèle de cette situation s'amorce comme suit :

$$\text{Min } z = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_4|$$

sous les contraintes :

$$|x_1 - x_4| \geq 5$$

………

Le modèle linéarisé s'écrit (on a posé $M = 25$ pour linéariser la première contrainte) :

$$\text{Min } z = s_1 + t_1 + s_2 + t_2 + s_3 + t_3$$

sous les contraintes :

$$x_1 - x_2 = s_1 - t_1$$

$$x_2 - x_3 = s_2 - t_2$$

$$x_3 - x_4 = s_3 - t_3$$

$$x_1 - x_4 + 25\,w \geq 5$$

$$x_1 - x_4 + 25\,w \leq 20$$

$$x_i = 25\,v_{i\mathrm{A}} + 5\,v_{i\mathrm{B}} + 10\,v_{i\mathrm{C}} + 13\,v_{i\mathrm{D}} + \ldots + 11\,v_{i\mathrm{N}} + 9\,v_{i\mathrm{P}} \qquad \text{tout } i$$

$$v_{1J} + v_{2J} + v_{3J} + v_{4J} = 1 \qquad \text{tout } J$$

$$v_{i\mathrm{A}} + v_{i\mathrm{B}} + v_{i\mathrm{C}} \leq 1 \qquad \text{tout } i.$$

On exige de plus que les variables $x_i$ et $t_i$ soient non négatives, et les variables $v_{iJ}$ et $w$ soient binaires.

Une solution optimale donne :

$$x_1 = 32 \quad x_2 = 35 \quad x_3 = 36 \quad x_4 = 37$$

$$v_{1A} = v_{1M} = v_{2D} = v_{2G} = v_{3B} = v_{3E} = v_{3F} = v_{4C} = v_{4H} = v_{4N} = v_{4P} = 1.$$

La première charge, confiée à André, le premier de cordée, sera donc constituée des colis A et M. La deuxième sera constituée des colis D et G ; la troisième, des colis B, E et F. La quatrième charge, confiée à Pierre, le dernier de cordée, sera formée des colis C, H, N et P.