

Énigmes Empiriques du CAPM-C: Un Survol

Pascal St-Amour

Service de l'enseignement de la finance

Hautes Études Commerciales, Montréal

16 juin 1999

Résumé

Le CAPM-C demeure depuis plus de 20 ans le principal modèle de valorisation des actifs financiers utilisé par les économistes. Pourtant, malgré un cadre rigoureux d'équilibre général et des prévisions intuitives et testables, ses performances demeurent limitées lorsque confronté aux données. Nous présentons les principales énigmes empiriques du CAPM-C, ainsi qu'un survol de quelques-unes des différentes approches de solution.

Mots clés: Modèle CAPM-C, prime de risque, taux sans risque.

Classification *JEL*: G120.

1 Introduction

Le *Capital Asset Pricing Model* de consommation (CAPM-C) de Lucas (1978) et Breeden (1979) constitue depuis plus de 20 ans le modèle de référence des économistes pour calculer la valeur d'un actif financier. Cet attachement comparé aux modèles alternatifs de type CAPM statique et *Arbitrage Pricing Theory* (APT) provient sans doute de l'intégration des choix simultanés d'épargne et de diversification à l'intérieur d'un cadre rigoureux d'équilibre général. Une deuxième raison peut être reliée à l'élégance du modèle. Le CAPM-C produit des prévisions théoriques directement testables et facilement justifiables. Ainsi, on relie la position optimale de l'agent à une condition d'équilibre où le coût marginal d'acheter un actif, i.e. son prix pondéré par l'utilité marginale de la consommation sacrifiée, est égal à l'espérance de son bénéfice marginal, i.e. sa valeur future pondérée par l'utilité marginale de consommation future. Cette relation permet par exemple de calculer la valeur d'un fonds propre comme l'espérance de la valeur escomptée du flux de dividendes auquel il donne droit, où le taux d'escompte subjectif est donné par le taux marginal de substitution inter temporelle (TMSI) entre la période présente et les périodes où les dividendes sont versées. Le TMSI peut être estimé en substituant des séries chronologiques macro-économiques dans les conditions de premier ordre.

Néanmoins, cet attachement peut sembler paradoxal compte tenu des performances empiriques mitigées du CAPM-C. En effet, lorsque confronté aux données financières et macro-économiques, le CAPM-C donne rarement des résultats probants. Qui plus est, les modèles alternatifs sont plus faciles à estimer, prédisent souvent mieux et ne présentent pas d'anomalies empiriques. Ces dernières peuvent être regroupées sous trois catégories: (i) le puzzle de la prime de risque trop élevée, (ii) le puzzle du taux sans risque trop faible et (iii) le puzzle de la prévisibilité du rendement excédentaire.

La première énigme stipule qu'il n'est pas possible de réconcilier les rendements excédentaires élevés que l'on observe sur les fonds propres avec les faibles risques de consommation qu'ils représentent, à moins que l'investisseur moyen ne soit excessivement averse au risque. La seconde est directement tributaire de la première: un agent très averse au risque présente également une faible élasticité de substitution inter temporelle. Pour le convaincre d'épargner, il faudrait lui offrir un taux d'intérêt beaucoup plus élevé que celui observé. Finalement, les primes de risque moyennes ne sont pas fixes, mais varient en fonction des cycles économiques. La seule façon de permettre au modèle de prendre en compte ces mouvements est d'introduire des variances et covariances qui soient non constantes, ce que l'on ne retrouve pas dans les données.

L'objectif de ce survol est de présenter une lecture heuristique de ces trois anomalies et des approches pour les solutionner. Ce survol ne se veut pas exhaustif, mais tente plutôt de familiariser le lecteur avec quelques-unes des différentes solutions qui ont récemment été proposées. La section 2 discute du cadre théorique du CAPM-C. Les trois énigmes empiriques sont présentées dans la section 3, alors que des méthodes de solution sont énumérées dans la section 4. Finalement, une conclusion résume les principaux éléments.

2 Modèles de valorisation

À la base de tout modèle de valorisation d'actifs se retrouve une relation entre le rendement espéré d'un actif financier et le risque qu'il représente aux yeux de l'investisseur. Plus précisément, on exprime le rendement excédentaire espéré par rapport au taux sans risque (la *prime de risque*) comme une fonction monotone croissante de la quantité de risque associée à un titre et au prix de ce risque.

La différence principale entre les modèles provient de la définition de ce qu'est un risque et par conséquent de son prix. Les modèles de type CAPM de Sharpe (1964) et Lintner (1965) associent le risque d'un actif à sa covariance avec le rendement sur le portefeuille de l'investisseur. Toutes choses étant égales par ailleurs, un agent sera plus hésitant à détenir un titre qui covarie positivement avec le portefeuille: un rendement faible (élevé) sur le titre en question aura tendance à coïncider avec un rendement faible (élevé) des autres titres. L'investisseur étant généralement considéré comme averse au risque, ce dernier exigera une prime de risque plus élevée pour accepter de détenir le titre. L'APT de Ross (1976) invoque un argument similaire pour expliquer la prime de risque. Cependant, l'APT précise davantage le risque comme étant relié à de grandes variables financières ou macro-économiques (les *facteurs*) communes à tous les titres. Les différences entre les rendements espérés des titres individuels s'expliquent alors par des sensibilités différentes aux facteurs communs.

Les modèles CAPM et APT dissocient la décision d'épargne de celle de diversification. En fait, l'investisseur est censé disposer d'un montant préétabli à répartir parmi un éventail de titres disponibles. L'apport majeur du modèle CAPM-C est d'intégrer les deux décisions dans un programme unique de maximisation d'une fonction objective: l'investisseur choisit simultanément l'épargne et les parts optimales à allouer entre les différents titres.

De manière plus concrète, le problème d'un agent représentatif peut s'écrire comme un choix d'une séquence de consommation $\{C_t\}_{t=0}^T$ et de parts de portefeuille $\{\Omega_t\}_{t=0}^T$, où T est l'horizon terminal de programmation et $\Omega_t = [\omega_{1t}, \omega_{2t}, \dots, \omega_{nt}]'$. Pour des raisons de simplification, tous les cas répertoriés dans la littérature supposent que ce problème est de nature *récurrente*, i.e. que le choix des séquences peut se simplifier en un choix de variables de contrôle génériques $C_t = C(I_t)$ et $\Omega_t = \Omega(I_t)$ que l'agent respecte à chaque période, où I_t est un ensemble d'information regroupant les variables d'état au temps t . Un problème est dit récursif si la fonction objective peut être écrite

comme suit:

$$J_t = \max_{\{C_t, \omega_{it}\}_i} W [C_t, E_t g(J_{t+1})] \quad (1)$$

sujet à une contrainte budgétaire:

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= (A_t - C_t) \boldsymbol{\Omega}'_t \mathbf{R}_{t+1} \\ &= (A_t - C_t) R_{m t+1}, \end{aligned} \quad (2)$$

où $\mathbf{R}_{t+1} \equiv [(1 + r_{1 t+1}), (1 + r_{2 t+1}), \dots, (1 + r_{n t+1})]'$ est le vecteur de rendements bruts.

La fonction $W[\cdot, \cdot]$ est connue sous le nom de *fonction d'agrégation* et relie l'utilité présente J_t à la consommation présente et à l'espérance conditionnelle $E_t(\cdot) = E(\cdot | I_t)$ d'une fonction $g(\cdot)$ de l'utilité future J_{t+1} . Les fonctions W et g sont toutes deux monotones croissantes et concaves. La contrainte budgétaire (2) exprime la richesse future A_{t+1} comme le rendement brut (principal et intérêts) sur la richesse présente non consommée. Le choix de diversification s'effectue par le choix des parts optimales ω_{it} entre n actifs.

L'intuition derrière le CAPM-C est facile à motiver. L'investisseur se soucie principalement de son utilité présente et de son utilité future. Ces deux mesures de bien-être sont définies uniquement sur les consommations présente et futures.¹ De part la contrainte budgétaire (2), une consommation présente plus élevée suppose un arbitrage entre une utilité présente plus forte et une utilité future plus faible. La fonction d'agrégation alloue les pondérations entre ces deux éléments qui conditionnent le choix de l'investisseur. De plus, un portefeuille présentant un rendement espéré plus élevé sera favorisé, puisqu'il permet de consommer davantage maintenant et dans le futur. Finalement,

1. On omet généralement l'utilité provenant du loisir de la fonction objective. La raison est que l'on suppose que le revenu de travail peut être parfaitement diversifier et est compris dans la mesure de richesse totale A_t . Nous considérons plus loin des cas où la diversification du risque de revenu de travail est incomplète.

par concavité, l'agent est averse au risque: un portefeuille plus volatile implique une incertitude plus grande sur la consommation future, ce qui est, toutes choses égales par ailleurs, moins souhaitable à ses yeux.

La version la plus fréquemment utilisée pour caractériser les préférences consiste à supposer que l'utilité est *séparable* dans le temps et dans l'espace. Ici, l'agent représentatif maximise l'utilité espérée au sens de Von-Neumann et Morgenstern. Cette restriction s'obtient en supposant que W et g sont linéaires:

$$J_t = U(C_t) + \beta E_t J_{t+1}, \quad (3)$$

où $\beta \in (0, 1)$ est un facteur subjectif de décote inter temporelle et $U(\cdot)$ est une sous-fonction d'utilité. La séparabilité temporelle provient du fait que l'utilité marginale de consommation dans une période donnée est indépendante de la consommation des autres périodes. De la même façon, la séparabilité spatiale est obtenue par axiome d'indépendance. L'utilité espérée est la somme pondérée par les probabilités conditionnelles des utilités dans les différents états:

$$E_t J_{t+1} = \int_F J_{t+1} dF_t(I_{t+1})$$

où $F_t(I_{t+1})$ est la cumulative conditionnelle à I_t . L'additivité implique que l'utilité marginale dans un état donné ne dépend pas de la consommation dans les autres états.

Par monotonie et concavité, on peut invoquer le principe du maximum et le théorème d'enveloppe pour conclure que les choix optimaux de C_t et Ω_t devront satisfaire les $n + 1$ conditions de premier ordre suivantes:

$$1 = \beta E_t \left[\frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} R_{i,t+1} \right], \quad i = 1, \dots, n, m; \quad (4)$$

où $U'(C_t) \equiv dU/dC_t$ est l'utilité marginale de consommation. Les conditions (4) sont connues sous le nom de *conditions d'Euler*. En décomposant les rendements bruts $R_{it+1} \equiv P_{it+1}/P_{it}$, où P_{it} est le prix *cum-dividendes* du titre i , on peut réécrire (4) comme:

$$U'(C_t)P_{it} = \beta E_t [U'(C_{t+1})P_{it+1}].$$

Intuitivement, l'agent alloue la consommation et le portefeuille optimal de manière à égaliser coût et bénéfice marginaux. Le premier est mesuré par le sacrifice de ne pas consommer maintenant pour investir dans un titre, i.e. le prix du titre pondéré par l'utilité marginale de la consommation présente à laquelle on renonce et le second est capté par l'espérance de la valeur du titre multipliée par l'utilité marginale de consommation future.

Les conditions d'Euler constituent la pierre angulaire du modèle CAPM-C. Par le fait même, toutes les énigmes empiriques émanent de cette relation. Dans le cadre d'un modèle complet d'équilibre général (par exemple Jermann 1998, Rouwenhorst 1995), une spécification de la technologie, de la diffusion de l'information et une discussion des conditions d'équilibre seraient nécessaires pour solutionner *conjointement* les prix (i.e. les rendements) et les quantités (i.e. la consommation et les parts). La grande majorité des applications du CAPM-C considèrent plutôt les quantités comme exogènes et solutionnent uniquement pour les prix d'équilibre.²

Une façon directe de mettre en évidence les difficultés qu'a le CAPM-C à reproduire les faits empiriques observés est d'introduire l'hypothèse additionnelle de log-normalité conditionnelle. Définissons $x_t \equiv \log(X_t)$. Si une variable X_{t+1} est conditionnellement log-normale, i.e. $x_{t+1} \sim N(E_t(x_{t+1}), \sigma_{xx t})$,

2. L'approche inverse de traiter les prix comme exogènes et de solutionner pour les quantités est bien sûr également possible. Elle sous-tend entre autres l'analyse de revenu permanent, de cycles de vie et d'épargne de précaution.

alors on a que:

$$\begin{aligned} E_t [X_{t+1}^a] &= E_t [\exp(ax_{t+1})] \\ &= \exp(aE_t[x_{t+1}] + 0,5a^2\sigma_{xx t}). \end{aligned}$$

Utilisant cette règle dans (4), on peut supposer que le TMSI, $\beta U'(C_{t+1})/U'(C_t)$, et les rendements bruts, R_{it+1} , sont conjointement log-normaux pour linéariser les conditions de premier ordre:

$$0 = \log(\beta) + E_t \Delta u'(C_{t+1}) + E_t r_{it+1} + 0,5 [\sigma_{uut} + 2\sigma_{uit} + \sigma_{iit}] \quad (5)$$

où Δ est l'opérateur de première différence, i.e $\Delta x_{t+1} \equiv x_{t+1} - x_t$.³

L'hypothèse de log-normalité des rendements bruts peut paraître excessive à première vue. Cependant, certaines études ont démontré que des tests d'aplatissement et d'asymétrie ne rejettent pas l'hypothèse nulle de rendements nets Gaussiens, du moins aux fréquences utilisées dans les applications empiriques du CAPM-C (Giovannini & Jorion 1989, Jorion & Giovannini 1993). Quant à celle concernant le TMSI, elle découle directement de l'hypothèse de rendements bruts log-normaux sous certaines restrictions. Plus précisément, si les premiers et deuxièmes moments de la distribution des rendements sont constants et si on suppose que la sous-fonction d'utilité $U(\cdot)$ est iso-élastique:

$$U(C) = \frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad (6)$$

où $\gamma > 0$ est l'aversion relative au risque d'Arrow-Pratt, alors on peut montrer (Merton 1990) que la consommation optimale est proportionnelle à la richesse, i.e. $C_t = \phi A_t$, où ϕ est une constante.

3. À noter que l'on utilise l'approximation logarithmique $x \simeq \log(1+x)$ pour x près de zéro afin de linéariser les rendements bruts.

Il en résulte que la richesse est log-normale et par le fait même, la consommation et le TMSI.⁴ En substituant les préférences (6) dans l'équation d'Euler (5), on obtient:

$$0 = \log(\beta) - \gamma E_t \Delta c_{t+1} + E_t r_{i,t+1} + 0,5 \left[\gamma^2 \sigma_{cct} - 2\gamma \sigma_{citt} + \sigma_{iit} \right] \quad (7)$$

Supposons qu'il existe un actif offrant un rendement réel certain et dénotons ce rendement net par $r_{f,t+1}$. Par absence d'incertitude, tous les termes de la matrice de covariance s'y rattachant sont nuls, ce qui implique que la prime de risque et le rendement sûr doivent satisfaire:

$$E_t r_{i,t+1} - r_{f,t+1} = \gamma \sigma_{citt} - 0,5 \sigma_{iit} \quad (8)$$

$$r_{f,t+1} = -\log(\beta) + \gamma E_t \Delta c_{t+1} - 0,5 \gamma^2 \sigma_{cct}. \quad (9)$$

Tout comme dans les autres modèles de valorisation, l'équation (8) relie la prime de risque d'un titre (plus une demie fois sa variance) à la quantité de risque fois son prix. Pour l'agent représentatif, sa seule source d'utilité étant la consommation, il apparaît naturel que le risque y soit relié. On réfère donc, dans le cadre du CAPM-C, à la covariance σ_{citt} comme étant le *risque de consommation* et de l'aversion au risque γ comme étant le *prix du risque de consommation*.

Intuitivement, l'agent désire un titre qui lui rapportera des rendements élevés au moment où leur utilité marginale est la plus forte, i.e. au moment où sa consommation est faible. Si la consommation covarie positivement avec les rendements, des rendements faibles coïncident plutôt avec une

4. Pour illustrer ce point, notons que:

$$\begin{aligned} \Delta u'(C_{t+1}) &= \log(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma} \\ &= -\gamma \log[(1-\phi)R_{m,t+1}] \\ &= -\gamma \log(1-\phi) - \gamma r_{m,t+1} \end{aligned}$$

qui est distribué normalement.

consommation faible. Il en résulte que l'agent exigera une prime élevée pour accepter de détenir le titre. Par ailleurs, étant donné une covariance positive, plus l'agent est averse au risque (i.e. γ est élevé), plus la prime compensatrice devra être élevée.

En ce qui a trait au rendement sans risque (9), on note que plus le taux d'escompte temporelle subjectif est faible (i.e. β est élevé), moins il est nécessaire d'offrir un taux sans risque élevé pour convaincre les agents d'épargner. Il en va de même pour la volatilité de la consommation (σ_{cc_t}): une forte volatilité anticipée incite les agents à épargner davantage, réduisant par le fait même le taux d'intérêt d'équilibre. Par contre, si l'agent anticipe une croissance de la consommation ($E_t \Delta c_{t+1}$) élevée, son épargne sera plus faible et le taux sans risque plus élevé. L'aversion au risque γ joue un rôle plus nuancé. Notons en effet que la relation entre $r_{f_{t+1}}$ et γ est quadratique. Pour des niveaux faibles à moyens d'aversion au risque, la relation est positive; pour des niveaux plus élevés, la relation devient négative.

3 Énigmes empiriques

TAB. 1 – *Statistiques descriptives, données États-Unis, 1959–1998*

	moyenne		variance	
$\Delta c_{t+1}^{(a)}$	0,0164	0,0083	0,0006	-0,0003
$r_{e_{t+1}}^{(b)}$	0,0726		0,1746	0,0071
$r_{f_{t+1}}^{(c)}$	0,0186			0,0030

Note: Statistiques descriptives pour données mensuelles américaines, période 1959:2 – 1998:5. (a) croissance (annualisée) consommation réelle per-capita biens non durables. (b) rendements réels (annualisés) sur indice composite Standard&Poor's. (c) rendements réels (annualisés) sur bons du Trésor de 90 jours.

Le tableau 1 présente des statistiques américaines mensuelles pour la période de la fin des années cinquante à aujourd'hui. On note tout d'abord que la prime de risque annualisée est de

5,4%, résultat d'un faible taux sur les bons du Trésor et d'un taux élevé de rendement sur les fonds propres. De plus, les rendements sur les titres risqués sont fortement plus volatiles que la croissance de la consommation: la variance des rendements est près de 22 fois supérieure à celle de la consommation. Il semble peu surprenant compte tenu de ces chiffres de constater une très faible covariance entre les deux séries.

3.1 Puzzle de la prime de risque

Selon tous les modèles de valorisation, une prime de risque élevée est justifiée si la quantité de risque l'est également. Les données américaines indiquent que ce n'est pas le cas, du moins en ce qui a trait au risque de consommation, ce qui implique que le prix du risque doit être élevé pour expliquer le fort rendement excédentaire moyen. Si on isole l'aversion relative au risque à partir de la prime de risque (8) et qu'on utilise les moments inconditionnels du Tableau 1 on obtient:

$$\hat{\gamma} = \frac{Er_{et} - r_{ft} + 0,5\sigma_{ee}}{\sigma_{ec}} = 236,03. \quad (10)$$

La théorie micro-économique indique qu'une valeur "raisonnable" de l'aversion au risque devrait se situer entre 0 et 10. La valeur obtenue est donc nettement excessive.⁵ Cette première anomalie empirique a été mise en évidence par Mehra & Prescott (1985) sous le nom de *puzzle de la prime de risque* et est sans doute la plus connue.⁶

5. Kocherlakota (1996) écrit

"[...] it is clear to me from conversations and from knowledge of their work that a vast majority of economists believe that values for $[\gamma]$ above ten (or, for that matter, above five) imply implausible behavior on the part of individuals." p. 52

6. Voir également Grossman et al. (1987), Breeden et al. (1989) et Cecchetti et al. (1993)

Il est bien sûr possible que la valeur élevée de $\hat{\gamma}$ ne soit pas un artéfact des données et que l'aversion au risque des agents soit réellement plus forte que ce que l'on avait anticipé (Kandel & Stambaugh 1991). Cependant, il convient de rappeler qu'à ce moment, l'agent devient prêt à déboursier des sommes considérables pour éviter d'être confronté à un risque minime. Par exemple, un agent ayant une consommation de 50 000 \$ et présentant une aversion au risque de 250 serait prêt à payer jusqu'à 863 \$ pour éviter de participer à une loterie offrant un gain ou une perte de 1 000 \$ avec probabilité 1/2, (Cochrane 1997, p. 24). De plus, comme nous le verrons à l'instant, un coefficient de courbure excessif entraîne d'autres types de problèmes.

3.2 Puzzle du taux sans risque

Nous avons mentionné plus haut que la relation entre le rendement du titre sûr et l'aversion au risque est quadratique: initialement croissante, puis décroissante. Pour des valeurs modérément élevées de γ , le taux sans risque prédit par le CAPM-C augmente suivant une hausse de l'aversion au risque. L'intuition est simple, on sait que pour des préférences séparables iso-élastiques l'aversion au risque est la réciproque de l'élasticité de substitution inter temporelle. Lorsque γ augmente, l'investisseur devient plus hésitant à substituer de la consommation présente pour de la consommation future. Par conséquent, il est nécessaire de lui offrir un taux d'intérêt élevé pour le convaincre d'épargner. Or, dans le cas américain, le taux moyen de croissance de la consommation demeure relativement élevé, suggérant une épargne vigoureuse, bien que le taux sans risque demeure très faible. D'après l'équation du taux sans risque (9), ceci implique une pondération excessive appliquée à l'utilité future: concrètement, un β supérieur à un. Cette deuxième énigme est connue sous le nom de *puzzle du taux sans risque* (Weil 1989).

L'énigme du taux sans risque est directement tributaire d'un γ élevé, ce qui incite certains auteurs à conclure que le puzzle de la prime de risque est le véritable problème à résoudre (Kocherlakota 1996). En outre, un taux d'escompte subjectif négatif n'est pas nécessairement incompatible avec un équilibre général. Kocherlakota (1990) démontre en effet que la fonction d'utilité séparable demeure finie pour autant que la sous-fonction d'utilité soit suffisamment courbée pour réduire asymptotiquement le flux direct d'utilité. Néanmoins, il serait sans doute approprié de dire que la plupart des économistes sont inconfortables avec un β supérieur à un.⁷

Il est également possible que l'inverse se manifeste. À cause des effets de deuxième ordre mentionnés plus haut, un γ excessif aura tendance à réduire à des valeurs *trop faibles* le taux sans risque prédit par rapport à la valeur observée. En conséquence on rétablit l'égalité entre les deux en réduisant le β à des valeurs très près de zéro – ce qui implique que $\log(\beta)$ devient fortement négatif – de manière à compenser pour l'influence de $\gamma^2\sigma_{cc}$ dans (9). C'est exactement l'effet que l'on retrouve dans le cas présent. En isolant le facteur d'escompte subjectif, on obtient:

$$\hat{\beta} = \exp\left(\hat{\gamma}E\Delta c_t - r_{ft} - 0,5\hat{\gamma}^2\sigma_{cc}\right) = 7,76e - 100 \quad (11)$$

autrement dit, l'agent est parfaitement myope et ne se soucie que de l'utilité présente! Cette seconde lecture du puzzle du taux sans risque est sans doute moins connue que la première. Néanmoins, elle pourrait expliquer les problèmes d'identification fréquemment rencontrés lors d'estimation conjointe de primes de risque et d'équation d'Euler de titres non risqués.

TAB. 2 – *Persistence, données États-Unis, 1959–1998*

	Δc_t	$r_{et} - r_{ft}$
Δc_t	1,000	0,025
Δc_{t-1}	-0,348	-0,049
Δc_{t-2}	-0,005	0,018
Δc_{t-3}	0,144	-0,018
$r_{et} - r_{ft}$	0,025	1,000
$r_{et-1} - r_{ft-1}$	0,159	0,271
$r_{et-2} - r_{ft-2}$	-0,028	0,004
$r_{et-3} - r_{ft-3}$	0,104	0,013

Note: Coefficients de corrélation entre croissance de consommation et rendements excédentaires présents et retardés.

3.3 Puzzle de la prévisibilité

Le tableau 2 donne les coefficients de corrélation entre les séries de croissance de consommation et les rendements excédentaires présents et retardés. On observe tout d’abord la forte auto-corrélation à la fois pour la croissance de la consommation (-0,35) et pour les primes de risque (0,27), cette dernière s’estompant rapidement pour des retards de plus d’un mois. On note de plus, que les rendements excédentaires ont tendance à être contra-cyclique, la consommation retardée affectant négativement les rendements présents.

Selon l’équation (8), la seule source de mouvement dans la prime de risque est la présence de variation dans les seconds moments conditionnels σ_t . Vu sous un autre angle, l’hétéroscédasticité conditionnelle est l’unique cause admissible de la persistance dans les primes de risque illustrée dans le tableau 2.

D’un point de vue théorique, il n’est pas clair que des seconds moments conditionnels soient la meilleure manière de prendre en compte des variations dans les primes de risque. En effet, dans

7. Une des raisons pour ce malaise est potentiellement introspective: il apparaît difficile de croire que le même niveau de consommation procure davantage de satisfaction s’il est consommé demain que s’il l’est aujourd’hui.

le cadre d'un modèle d'équilibre général complètement spécifié, il est possible de générer des liens fonctionnels de pratiquement n'importe quelle forme (croissante, décroissante, concave ou convexe) entre les primes de risques et les deuxièmes moments conditionnels, dépendant des valeurs des paramètres et des choix distributifs (Backus & Gregory 1993).

De plus, l'évidence empirique en ce sens n'est pas concluante: pris individuellement, la volatilité de la consommation et des rendements sur les fonds propres n'est que peu prévisible, tout comme la corrélation entre la consommation et les rendements (Cochrane 1997). L'estimation conjointe par maximisation de vraisemblance d'un modèle CAPM-C avec hétéroscédasticité conditionnelle (e.g. modèles ARCH-M) se traduit souvent par un rejet de l'hypothèse que les deuxième moments sont constants (voir Bollerslev et al. 1992, pour un survol). Cependant, ce test devient alors un test conjoint d'homoscédasticité *et* de primes de risque constantes; le rejet de la seconde hypothèse n'implique pas nécessairement celui de la première. Finalement, les primes de risque sont nettement mieux prévisibles lorsqu'on utilise d'autres instruments que les seconds moments.⁸ En bref, l'apport de modèles d'hétéroscédasticité conditionnelle de types ARCH semble une solution *ad-hoc* et insatisfaisante pour prendre en compte le véritable problème que les primes de risque varient dans le temps. Cette troisième énigme empirique du CAPM-C est connue sous le nom de *puzzle de prévisibilité*.

De manière plus prosaïque, il apparaît difficile de comprendre pourquoi les primes pourraient être aussi élevées, aussi facilement prévisibles et les taux d'intérêt aussi bas. En fait, les données présentées indiquent que tout agent rationnel devrait emprunter immédiatement au taux sans risque

8. En particulier, les ratios prix-dividendes prévoient remarquablement bien les primes de risque. Cochrane (1997) écrit

“[...] price divided by just about anything works about as well [pour prévoir les rendements excédentaires], including earnings, book value, moving averages of past prices.” p. 8

pour investir dans les fonds propres! Nous considérons maintenant quelques-uns des éléments de réponse pouvant justifier son hésitation.

4 Approches de solution

Un des dénominateurs communs de la plupart des solutions proposées aux énigmes empiriques est qu'elles s'attardent à la définition du risque d'un titre financier. En effet, nous avons vu que l'un des principaux problèmes réside dans la faible volatilité de la consommation agrégée. Or, le CAPM-C s'intéresse d'abord et avant tout aux processus de lissage *du TMSI*: la correspondance avec le lissage de la consommation n'est que la résultante des hypothèses sur les préférences. Pour cette raison, une partie importante de la littérature considère d'autres sources de fluctuations du TMSI.

4.1 Non-séparabilité des préférences

Le modèle présenté jusqu'ici suppose que le flux d'utilité se décompose en une somme de sous-utilités de consommation. Ces dernières sont entièrement indépendantes des consommations aux périodes adjacentes. Pourtant, on pourrait penser que l'utilité de consommation s'étend sur plus d'une période. Des biens durables, ou encore des effets d'habitude se retrouvent pour plusieurs biens couramment consommés.

Cette idée est à la base de l'introduction des préférences chronologiquement non-séparables. Des modifications théoriques au CAPM-C ont été introduites par Constantinides (1990), puis furent analysées empiriquement par Ferson & Constantinides (1991). La modification principale concerne

la sous-fonction d'utilité $U(\cdot)$ qui incorpore maintenant la consommation passée:

$$J_t = \frac{(C_t + bC_{t-1})^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta E_t J_{t+1}, \quad (12)$$

où $J_t = J(A_t, C_{t-1})$. Le paramètre b capte les effets de durabilité ou de formation d'habitudes chez l'agent. Plus précisément, $b < 0$ implique que bC_{t-1} a l'interprétation d'un *point de félicité*, i.e. l'utilité marginale de consommation tend vers l'infini lorsque C_t tend vers bC_{t-1} . On peut parler de niveau minimal de consommation déterminé par les habitudes passées de consommation. Par contre, lorsque $b > 0$, on note que la consommation présente affecte positivement l'utilité marginale future: on parle alors de C_t comme mesurant le flux de service présent provenant de la consommation d'un bien durable.

Les équations d'Euler sont obtenues à partir de (5):

$$E_t r_{i,t+1} - r_{f,t+1} = -\sigma_{ui,t} - 0,5\sigma_{ii,t} \quad (13)$$

$$r_{f,t+1} = -\log(\beta) - E_t \Delta u'(C_{t+1}) - 0,5\sigma_{uu,t} \quad (14)$$

où $u'(C_t) \equiv \log(C_t^{-\gamma} + b\beta E_t C_{t+1}^{-\gamma})$. On constate que $b = 0$ reproduit directement le cas standard. Le cas général où $b \neq 0$ est intéressant dans la mesure où des fluctuations dans le TMSI ne dépendent plus uniquement de la consommation de la période présente C_t et de la période prochaine C_{t+1} . En effet, la non-séparabilité temporelle implique que C_{t-1} et C_{t+2} affectent également l'utilité marginale. Il en résulte une covariance (et donc un risque) additionnelle pouvant potentiellement expliquer la prime de risque élevée et le faible taux sans risque.

Les résultats empirique sont toutefois peu concluants. Ferson & Constantinides (1991) trouvent que $b < 0$, donc que les préférences sont davantage caractérisées par une formation d’habitude que par la durabilité. Cependant la covariance additionnelle est insuffisante pour justifier les rendements excédentaires observés. Ce résultat peut s’expliquer: la consommation, on l’a vu, demeure une série extrêmement lisse, l’ajout de consommations passées et futures n’augmente que très peu la volatilité du TMSI. Néanmoins, il est à noter que ce modèle améliore la performance quant au taux sans risque. En effet, puisque l’agent voit son niveau minimal de consommation augmenter avec sa consommation présente, il doit accroître son épargne en conséquence pour maintenir la consommation future. Cet effet de rochet réduit le taux d’intérêt d’équilibre sur les fonds épargnés.

Bakshi & Chen (1996) abordent les questions de non-séparabilités temporelles dans une optique différente, en mettant l’accent sur des effets de richesse plutôt que de consommation passées. Concrètement, ils modélisent les *préférences pour le statut social* comme pouvant affecter l’utilité de consommation:

$$J_t = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} (W_t - \kappa A_t)^{-\lambda} + \beta E_t J_{t+1}, \quad (15)$$

où W_t est le niveau agrégé de richesse du groupe de référence auquel l’agent se compare et $\kappa, \lambda \geq 0$ sont des paramètres de préférence pour le statut. Ici, l’utilité marginale est affectée si la richesse de l’agent est trop faible par rapport au groupe. Ce modèle partage donc une optique de “keeping up with the Joneses” d’Abel (1990) où la richesse relative plutôt que la consommation relative est importante aux yeux de l’investisseur. Lorsque $\kappa \neq 0$, la non-séparabilité chronologique est obtenue par théorème d’enveloppe et implique la présence d’un second terme dans les équations d’Euler. Le modèle standard est obtenu en imposant $\lambda = 0$.

Par approximation en temps discret du modèle en temps continu, on obtient:

$$E_t r_{i,t+1} - r_{f,t+1} \simeq \gamma \sigma_{cit} + \lambda \sigma_{ait} - \lambda \sigma_{wit}. \quad (16)$$

pour la prime de risque.⁹ Donc, les covariances potentielles entre les rendements et les richesses individuelles et collectives peuvent expliquer les primes de risque. Ainsi, un rendement excédentaire élevé sera obtenu si des rendements faibles ont tendance à coïncider avec une richesse faible et/ou une richesse sociale élevée. Comme le statut social de l'agent se détériore par rapport à son groupe de référence, ceci affecte négativement son utilité marginale de consommation. Il en résulte un risque de TMSI plus élevé et une prime de risque plus importante.

Empiriquement, le modèle de Bakshi & Chen (1996) peut difficilement être testé étant donné l'absence de données sur la richesse totale (voir plus bas), tant agrégée qu'individuelle. On utilise donc une version simplifiée du modèle qui impose $\kappa = 0$, de telle sorte que seule la richesse collective affecte les préférences de l'agent. De plus, on a recours à un indice du marché, le S&P 500, comme substitut au rendement sur la richesse agrégée. Une estimation par méthode généralisée de moments (GMM) qui impose $\beta = 1$ révèle des estimation raisonnables de γ et λ qui indiquent les effets de statut sont apparemment non négligeables.

Epstein & Zin (1989, 1991) considèrent plutôt le cas de préférences qui soient non-séparables à la fois dans le temps et dans l'espace. Plus précisément, ils étudient le cas où la fonction $g(\cdot)$ est iso-élastique et la fonction d'agrégation $W[\cdot, \cdot]$ est à élasticité constante de substitution dans (1):

$$J_t = \max_{\{C_t, \omega_{i,t}\}_i} \left\{ (1 - \beta) C_t^{1-\rho} + \beta \left[E_t J_{t+1}^{1-\alpha} \right]^{\frac{1-\rho}{1-\alpha}} \right\}^{\frac{1}{1-\rho}}, \quad (17)$$

9. Bakshi & Chen (1996) ne dérivent pas l'équation du taux sans risque. On notera également l'absence du terme $0.5\sigma_{ii,t}$ qui est éliminé par l'utilisation du lemme d'Itô.

où $\gamma > 0$ est un paramètre d'aversion au risque et $\rho > 0$ un paramètre d'élasticité de substitution inter temporelle. On démontre facilement que la restriction $\gamma = \rho$ revient au cas standard de préférences séparables, d'où le nom de *préférences récursives généralisées*. On note que les préférences (17) n'imposent donc pas de restriction paramétrique liant les attitudes par rapport au risque à celle par rapport à la chronologie de la consommation. Heuristiquement, on pourrait s'attendre à ce qu'un agent très averse au risque soit également peu enclin à substituer entre les périodes. Cependant, il n'existe pas de motivations théorique claires imposant cette relation *a-priori*. De plus, les probabilités entrent de manière non-linéaire dans la fonction objective, une représentation obtenue lorsque l'axiome d'indépendance de Von-Neuman et Morgenstern est relâché et que l'agent maximise l'*utilité non espérée*. Les préférences proposées par Epstein & Zin sont en accord avec les attitudes par rapport au risque recensées dans la littérature expérimentale (Machina 1982, Epstein & Zin 1989).

Cette généralisation des préférences a des répercussions importantes au niveau des équations de valorisation. Plus précisément, sous l'hypothèse de log-normalité, on peut prouver que les rendements excédentaires et la prime de risque doivent satisfaire:

$$\mathbb{E}_t r_{it+1} - r_{ft+1} = \rho\phi\sigma_{cit} + (1 - \phi)\sigma_{imt} - 0.5\sigma_{iit}, \quad \text{avec } \phi \equiv \frac{1 - \gamma}{1 - \rho} \quad (18)$$

et

$$\begin{aligned} r_{ft+1} = & -\phi \log(\beta) + \rho\phi\mathbb{E}_t\Delta c_{t+1} + (1 - \phi)\mathbb{E}_t r_{mt+1} \\ & - 0.5 [(\rho\phi)^2\sigma_{cct} - 2\rho\phi(\phi - 1)\sigma_{cmt} + (\phi - 1)^2\sigma_{mmt}] \end{aligned} \quad (19)$$

De (18), on note que le rendement excédentaire est maintenant expliqué par un deuxième risque, soit la covariance avec le portefeuille du marché, dès que $\gamma \neq \rho$, i.e. $\phi \neq 1$. La correspondance avec

le CAPM statique est donc immédiate: si la contribution de ce risque est positive, une prime de risque élevée n'a plus à être uniquement expliquée par le seul risque de consommation. Il en résulte qu'on peut générer des rendements excédentaires élevés pour un faible niveau d'aversion au risque.

De plus, le taux sans risque (19) ne dépend plus uniquement des premiers et seconds moments de la croissance de la consommation. En particulier, un taux sans risque plus faible est obtenu par la variance du rendement sur le portefeuille de marché σ_{mmt} et potentiellement par la covariance entre le marché et la consommation. Finalement, il est à noter que toute variation temporelle dans les primes de risque doit encore être expliquée par des seconds moments conditionnels qui varient dans le temps.

Empiriquement, les résultats initiaux publiés par Epstein & Zin (1991) semblent prometteurs: l'aversion au risque estimée est dans les niveaux raisonnables et on rejette l'hypothèse nulle que $\gamma = \rho$. Un problème majeur cependant réside dans l'absence de séries chronologiques sur le rendement de richesse totale r_{mt} . Epstein & Zin contournent ce problème en utilisant un indice de marché (e.g. le S&P 500) comme remplaçant. Cette procédure biaise leurs résultats en leur faveur, comme le fait remarquer Kocherlakota (1996), en surestimant la covariance entre r_{mt+1} et les grands indices industriels r_{it+1} utilisés dans l'estimation.¹⁰ D'autres estimations réalisées par la suite tendent à invalider leur modèle et ne rejettent pas la nulle de préférences séparables (Jorion & Giovannini 1993, Normandin & St-Amour 1998).

10. L'indice composite S&P 500 est construit à partir des mêmes titres composants les indices industriels. Le rendement sur la richesse totale r_{mt} doit en principe incorporer *tous* les actifs humains, non humains, financiers et non financiers et pas seulement les fonds propres. La critique de Roll (1977) s'applique donc entièrement.

4.2 Risques de préférences

Nous avons vu qu'une des restrictions discutables des préférences iso-élastiques et séparables est que l'aversion au risque est inversement reliée à l'élasticité de substitution inter temporelle. Il existe également d'autres propriétés qui ne sont pas nécessairement souhaitables que l'on peut associer à ces préférences.

Premièrement, on doit rappeler que les préférences iso-élastiques jumelées à une hypothèse de rendements Gaussiens avec moyenne et variance constantes constituent un des rares cas où il est possible de dégager des formes réduites pour la consommation et le choix de portefeuille optimaux. Celles-ci sont alors caractérisés par une propension marginale et moyenne à consommer constante (voir plus haut) et un portefeuille qui est indépendant de la richesse. Ceci implique que l'on consomme une part constante de sa richesse, indépendamment du niveau d'avoir net, ce qui semble contre-intuitif. De plus, on peut douter que la composition de portefeuille soit indépendante de l'âge ou du niveau de richesse. Heaton & Lucas (1997) trouvent en effet que les individus à la retraite investissent davantage dans les fonds propres et que la part de la richesse investie dans les actions diminue avec l'avoir net.

Deuxièmement, il peut sembler contestable de supposer que l'aversion au risque soit constante et, en particulier, indépendante de l'âge et de la richesse de l'agent. Par introspection, on peut avancer que le même risque ne générera probablement pas la même réaction que l'on soit jeune ou vieux, riche ou pauvre. On peut également supposer que les conditions macro-économiques de chômage ou de précarité puissent avoir une incidence sur notre inconfort associé à un risque. Pourtant, ces effets sont entièrement exclus des préférences iso-élastiques.

Ces considérations sont prises en compte par certains auteurs qui relâchent l'hypothèse d'aversion *inconditionnelle* au risque, en faveur d'une aversion *conditionnelle*. Plus précisément, on considère que, suite à la réalisation d'un état stochastique de la nature, l'utilité de l'agent est iso-élastique. La nuance est importante dans la mesure où elle permet des sources additionnelles de risque pouvant influencer le risque de TMSI.

Normandin & St-Amour (1998) proposent un modèle d'utilité non-séparables à la Epstein & Zin (1989), avec des chocs de préférences. Ces chocs peuvent être vus comme captant des effets non modélisés, tels des changements dans les prix relatifs. Le résultat principal est la présence d'un second risque dans l'équation d'Euler qui capte des covariances entre les chocs de préférences et les rendements. Intuitivement, dans le cas d'une covariance négative, des rendements faibles auraient tendance à coïncider avec des chocs élevés de préférences où l'utilité marginale serait beaucoup plus élevée. Comme le risque de TMSI serait nettement plus important que dans le modèle standard, on pourrait justifier la prime de risque élevée, sans recourir à une aversion au risque excessive. Les résultats empiriques obtenus tendent à valider cette hypothèse.

Campbell & Cochrane (1995) abordent cette question sous un angle différent en utilisant une sous-fonction d'utilité de type hyperbolique (HARA) où le point de félicité X_t est une fonction des innovations de consommation:

$$\frac{(C_t - X_t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

En linéarisant les équation d'Euler et sous certaines contraintes distributives, on obtient:

$$E_t r_{i\ t+1} - r_{f\ t+1} = \gamma[1 + \lambda(s_t)]\sigma_{ict} - 0.5\sigma_{ii\ t}, \quad (20)$$

$$r_{f\ t+1} = -\log(\beta) + \gamma E_t[\Delta c_{t+1} + \Delta s_{t+1}] - 0,5\gamma^2[1 + \lambda(s_t)]\sigma_{cct}. \quad (21)$$

où $S_t \equiv \frac{C_t - X_t}{C_t}$ est la consommation excédentaire par rapport au point de félicité X_t et $s_t \equiv \log(S_t)$.

Le facteur $\lambda(s_t)$, est défini comme une fonction de sensibilité mesurant la covariance entre le log de la consommation excédentaire et les innovations de la croissance de consommation. Le cas standard est obtenu en imposant $s_t = s, \forall t$ qui implique $\lambda(s) = 0$.

Campbell & Cochrane (1995) innove en introduisant un apport supplémentaire au prix du risque de consommation et permettant à ce prix de varier en fonction de la consommation excédentaire dans la prime de risque (20). Comme $\lambda(\cdot) \geq 0$, on souhaite ici réduire l'emphase sur l'aversion au risque γ comme seul facteur de prix de risque. De plus, on tente de reproduire le caractère contra-cyclique des primes de risque. Si $\lambda(\cdot)$ est monotone décroissant, les reprises s'associant à un éloignement de la consommation du point de félicité, on obtient une chute des primes de risque, alors que les récessions génèrent l'effet inverse. De plus, on note que l'accroissement de volatilité du TMSI obtenu par des points de félicité non constants a un effet réducteur sur le taux sans risque, obtenu via la présence de $\lambda(s_t)$ qui amplifie la variance de consommation.

Empiriquement, le gain de performance demeure toutefois limité. Tout comme dans Ferson & Constantinides (1991), on n'utilise que la volatilité de la croissance de consommation pour expliquer la volatilité du TMSI. La consommation étant extrêmement lisse, l'apport au risque de TMSI demeure insuffisant pour justifier les rendements excédentaires. Il en résulte des γ excessifs lors d'exercices de calibration. De plus, une estimation du modèle révèle que le puzzle de prévisibilité n'est pas résolu par ce modèle: la variation dans $\lambda(s_t)$ est nettement insuffisante pour expliquer les changements de moyen terme dans la prime de risque (Gordon & St-Amour 1999a). Néanmoins, il est à noter que la performance est plus favorable en ce qui a trait au taux sans risque.

Une approche plus générique des risques de préférences consiste à traiter une partie des fluctuations dans le TMSI comme résultant de changements dans une variable non observable, i.e. une

variable latente. Ce type d'analyse est proposé par Gordon & St-Amour (1999*a,b*). Ici, l'objectif est de caractériser la distribution des fluctuations dans l'aversion au risque qui pourraient être cohérents avec les mouvements observés dans les séries financières. Concrètement, le modèle utilisé est:

$$J_t = \Theta \frac{(\Theta^{-1} C_t)^{1-\gamma_t}}{1-\gamma_t} + \beta E_t J_{t+1}, \quad (22)$$

où $\gamma_t = \gamma(S_t)$ et S_t est une variable latente affectant l'aversion au risque. Le paramètre Θ est une mesure subjective de l'importance de la consommation. Intuitivement, lorsque la consommation est faible, i.e. $C_t < \Theta$, si l'aversion au risque est contra-cyclique, une chute de la consommation entraîne un accroissement de la courbure de la fonction d'utilité et donc, un accroissement de la pente de l'utilité marginale. Il en résulte une hausse beaucoup plus forte de l'utilité marginale et donc un risque accru de fluctuations du TMSI contre lequel l'agent voudra se protéger. Des mouvements similaires sont obtenus dans le cas où la consommation est élevée, i.e. $C_t > \Theta$ et l'aversion est pro-cyclique. Le cas standard est obtenu en imposant $\gamma_t = \gamma, \forall t$.

Les équations d'Euler dérivées par Gordon & St-Amour (1999*a,b*) sont en temps continu, mais une approximation en temps discret est donnée par:

$$E_t r_{it+1} - r_{ft+1} \simeq [c_t - \theta] \sigma_{\gamma it} + \gamma_t \sigma_{cit} - 0.5 \sigma_{iit} \quad (23)$$

où $\theta \equiv \log[\Theta]$ et

$$\begin{aligned} r_{ft+1} \simeq & -\log(\beta) + \gamma_t E_t[\Delta c_{t+1}] + [c_t - \theta] E_t[\Delta \gamma_{t+1}] + \{1 - \gamma_t [c_t - \theta]\} \sigma_{\gamma ct} \\ & - 0.5 \gamma_t^2 \sigma_{cct} - 0.5 [c_t - \theta]^2 \sigma_{\gamma \gamma t} \end{aligned} \quad (24)$$

Le premier point à noter est la présence d'un second facteur contribuant au risque de TMSI. En effet, la covariance possible des rendements avec les préférences pour le risque pourrait expliquer les primes de risque élevées. Plus précisément, à des niveaux faibles (élevés) de consommation, si l'aversion au risque est contra- (pro-) cyclique, le terme $[c_t - \theta]\sigma_{\gamma_{it}}$ est positif, ce qui implique un rendement excédentaire plus élevé. Par ailleurs, le prix du risque de préférence $\sigma_{\gamma_{it}}$ dépend de la consommation, ce qui pourrait justifier le puzzle de prévisibilité, *même* si les seconds moments sont homoscédastiques. Finalement, on peut expliquer un taux sans risque faible par un argument d'épargne de précaution: les fluctuations additionnelles dans le TMSI associées à une aversion au risque non constante font augmenter l'épargne de l'agent et réduisent le taux sans risque. Du taux sans risque (24), on note qu'à des niveaux faibles (élevés) de consommation, une aversion contra- (pro-) cyclique se traduit par une contribution réductrice de $\{1 - \gamma_t[c_t - \theta]\}\sigma_{\gamma_{ct}}$. De plus, le terme $-0.5[c_t - \theta]^2\sigma_{\gamma_t}$ réduit inconditionnellement le taux sans risque.

Empiriquement, les résultats obtenus par Gordon & St-Amour tendent à confirmer l'importance des changements dans les attitudes au risque. Plus précisément, des faibles fluctuations dans γ_t augmentent considérablement l'amplitude des changements dans le TMSI. Une estimation conjointe des *prix* des fonds propres et des bons génère des estimations raisonnables des paramètres de préférence (Gordon & St-Amour 1999b) et tendent à valider l'hypothèse de changements contra-cycliques dans l'aversion au risque. Des résultats similaires sont obtenus lorsque le modèle est estimé avec des rendements excédentaires individuels (Gordon & St-Amour 1999a).

4.3 Agents hétérogènes

Jusqu'à maintenant, nous avons supposé l'existence d'un agent représentatif présentant des caractéristiques d'aversion au risque et à la substitution inter temporelle que nous avons étendues

à l'ensemble de la population. En réalité les agents sont bien sûr hétérogènes tant dans leur niveau de richesse, de revenu que de leurs préférences.

Pour le CAPM-C, l'hétérogénéité ne pose pas de problème majeur *tant que les marchés demeurent complets*. En effet, il est possible d'invoquer des conditions relativement souples d'agrégation nous permettant de construire un agent "moyen", même si l'hétérogénéité est importante (voir Constantinides 1982, pour plus de détails). Par contre des marchés incomplets et/ou présentant des frictions sont plus problématiques. Par exemple, on sait qu'il n'existe pas de mécanismes privés d'assurance complète contre les fluctuations du revenu de travail. Le lissage offert par les mécanismes privés d'assurance emploi est incomplet et souvent lui-même aléatoire. Ceci soulève la question à savoir si le risque individuel est potentiellement plus important que le risque collectif.

Constantinides & Duffie (1996) tente justement d'introduire cette hétérogénéité dans les revenus de travail non diversifiables comme élément de réponse aux énigmes du CAPM-C. Le résultat principal de cette démarche est un vecteur d'*inégalités* d'Euler qui prend en compte l'effet d'assurance incomplète de revenus pour le risque du TMSI. On obtient également que la valorisation individuelle privée est indépendante de l'identité de l'agent. Ce constat rejoint celui d'unicité du portefeuille de marché obtenu par le CAPM.

De plus, puisque le risque de TMSI est sous-estimé dans le modèle standard qui suppose les revenus de travail diversifiés, on peut expliquer pourquoi les agents semblent autant averses au seul risque de consommation. Cette absence de diversification possible entraîne une épargne de précaution additionnelle qui augmente le prix des bons (et donc diminue le taux d'intérêt). Finalement il est possible de rationaliser les variations contra-cycliques dans les primes de risque. Si la dispersion entre les revenus de travail s'accroît durant les récessions, le risque additionnel pour les agents individuels se traduit par une baisse du prix des titres risqués à l'équilibre.

L'ensemble apparaît tout à fait plausible, cependant, il est à noter que des restrictions sévères quant à la formulation de l'hétérogénéité des revenus sont nécessaires pour arriver à des équations de valorisation exploitables. Des recherches ultérieures seront nécessaires pour vérifier la validité de ces contraintes.

5 Conclusion

L'objectif de ce survol a été de présenter de manière heuristique les principales énigmes empiriques du modèle CAPM-C de valorisation des actifs. Nous avons vu que le CAPM-C est incapable de prédire correctement les moments conditionnels des rendements sans introduire des valeurs déraisonnables des paramètres de préférence et/ou des hypothèses *ad-hoc* quant à la distribution des variables aléatoires.

Dans un second temps, nous avons discuté de quelques-unes de approches de solution recensées dans la littérature économique. Notre analyse est volontairement incomplète et partielle. Par exemple, nous avons omis de discuter des solutions “statistiques” aux puzzles, comme la prise en compte de biais d'agrégation temporelle ou l'utilisation de structures plus flexibles de distribution des chocs aléatoires. Sans vouloir minimiser l'apport de ces éléments de réponse, il convient de souligner que le défi est d'abord et avant tout d'ordre théorique plutôt que distributif.

Malgré ses faiblesses empiriques évidentes, le CAPM-C continue largement de susciter un intérêt marqué dans la profession. L'élégance théorique du modèle et le caractère intuitif de ses prévisions ne sont sans doute pas étrangères à cette fidélité.

Références

- Abel, A. B. (1990), ‘Asset pricing under habit formation and catching up with the Joneses.’, *American Economic Review* **80**, 38–42.
- Backus, D. K. & Gregory, A. W. (1993), ‘Theoretical relations between risk premiums and conditional variances’, *Journal of Business and Economic Statistics* **11**, 177–185.
- Bakshi, G. S. & Chen, Z. (1996), ‘The spirit of capitalism and stock-market prices’, *American Economic Review* **86**, 133–157.
- Bollerslev, T., Chou, R. Y. & Kroner, K. F. (1992), ‘ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence’, *Journal of Econometrics* **55**, 5–59.
- Breedon, D. T. (1979), ‘An inter-temporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities’, *Journal of Financial Economics* **7**, 265–296.
- Breedon, D. T., Gibbons, M. & Litzenberger, R. (1989), ‘Empirical tests of the consumption-oriented CAPM’, *Journal of Finance* **44**, 231–262.
- Campbell, J. Y. & Cochrane, J. H. (1995), By force of habit: A consumption-based explanation of aggregate stock market behavior, Discussion Paper 1708, Institute of Economic Research, Harvard University.
- Cecchetti, S. G., Lam, P.-S. & Mark, N. C. (1993), ‘The equity premium and the risk-free rate: Matching the moments’, *Journal of Monetary Economics* **31**, 21–45.
- Cochrane, J. H. (1997), Where is the market going? uncertain facts and novel theories, Working Paper 6207, NBER.
- Constantinides, G. M. (1982), ‘Intertemporal asset pricing with heterogeneous consumers and without demand aggregation’, *Journal of Business* **55**, 253–267.
- Constantinides, G. M. (1990), ‘Habit persistence: A resolution of the equity premium puzzle’, *Journal of Political Economy* **98**, 519–543.
- Constantinides, G. M. & Duffie, D. (1996), ‘Asset pricing with heterogeneous consumers’, *Journal of Political Economy* **104**, 219–240.
- Epstein, L. G. & Zin, S. E. (1989), ‘Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and asset returns: A theoretical framework’, *Econometrica* **57**, 937–969.
- Epstein, L. G. & Zin, S. E. (1991), ‘Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and asset returns: An empirical analysis’, *Journal of Political Economy* **99**, 263–268.
- Ferson, W. E. & Constantinides, G. M. (1991), ‘Habit persistence and durability in aggregate consumption: Empirical tests’, *Journal of Financial Economics* **29**, 199–240.
- Giovannini, A. & Jorion, P. (1989), ‘The time variation of risk and return in the foreign exchange and stock markets’, *Journal of Finance* **44**, 307–325.

- Gordon, S. & St-Amour, P. (1999*a*), Estimating a continuous-time asset pricing model with state-dependent risk aversion, cahier de recherche 9711, Département d'Économique, Université Laval.
- Gordon, S. & St-Amour, P. (1999*b*), A preference regime model of bear and bull markets, cahier de recherche 9906, Université Laval.
- Grossman, S. J., Melino, A. & Shiller, R. J. (1987), 'Estimating the continuous time consumption-based capital asset pricing model', *Journal of Business and Economic Statistics* **5**, 315–327.
- Heaton, J. C. & Lucas, D. J. (1997), Savings behavior and portfolio choices: Which risks matter, mimeo, Northwestern University and NBER.
- Jermann, U. J. (1998), 'Asset pricing in production economies', *Journal of Monetary Economics* **41**, 257–275.
- Jorion, P. & Giovannini, A. (1993), 'Time-series tests of a non-expected utility model of asset pricing', *European Economic Review* **37**, 1083–1100.
- Kandel, S. & Stambaugh, R. F. (1991), 'Asset returns and intertemporal preferences', *Journal of Monetary Economics* **27**, 39–71.
- Kocherlakota, N. R. (1990), 'On the 'discount' factor in growth economies', *Journal of Monetary Economics* **25**, 43–47.
- Kocherlakota, N. R. (1996), 'The equity premium: It's still a puzzle', *Journal of Economic Literature* **34**, 42–71.
- Lintner, J. (1965), 'The valuation of risky assets and the selection of risky investment in stock portfolios and capital budgets', *Review of Economics and Statistics* **47**, 13–37.
- Lucas, R. E. (1978), 'Asset prices in an exchange economy', *Econometrica* **46**, 1429–45.
- Machina, M. J. (1982), 'Expected utility analysis without the independence axiom', *Econometrica* **50**, 277–323.
- Mehra, R. & Prescott, E. C. (1985), 'The equity premium: A puzzle', *Journal of Monetary Economics* **15**, 145–161.
- Merton, R. C. (1990), *Continuous-Time Finance*, Basil Blackwell, Oxford.
- Normandin, M. & St-Amour, P. (1998), 'Substitution, risk aversion, taste shocks and equity premia', *Journal of Applied Econometrics* **13**, 265–281.
- Roll, R. (1977), 'A critique of the asset pricing theory's tests: Part 1: On past and potential testability of the theory', *Journal of Financial Economics* **4**, 129–176.
- Ross, S. (1976), 'The arbitrage theory of capital asset pricing', *Journal of Economic Theory* **13**, 341–360.
- Rouwenhorst, K. G. (1995), Asset pricing implications of equilibrium business cycle models, in T. F. Cooley, ed., 'Frontiers of Business Cycle Research', Princeton University Press, chapter 10, pp. 294–330.

Sharpe, W. (1964), 'Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk', *Journal of Finance* **19**, 425–442.

Weil, P. (1989), 'The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle', *Journal of Monetary Economics* **24**, 401–421.